Elementy matematyki

Daniel Wójcik

Szymon Łęski
d.wojcik@nencki.gov.pl
s.leski@nencki.gov.pl

www.neuroinf.pl/Members/szleski/swps

Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego
Warszawa, Polska

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \ .$$

x_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli x_n są liczbami, mówimy o ciągu liczbowym.

Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \, .$$

x_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli x_n są liczbami, mówimy o ciągu liczbowym.

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$,
$x_1 = 1, \; x_n = 2 * x_{n-1}$.

Przykładowe wykresy.

Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Ścisła definicja: x jest granicą ciągu x_n, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Ścisła definicja: x jest granicą ciągu x_n, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Przykład:

$$x_n = \frac{1}{n} \ , \qquad x_n \to 0$$

Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny

Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$

Często spotykane granice

- Ciąg stały jest zbieżny
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Jeśli $p > 0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$
- Jeśli $|x| < 1$ to $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Własności granicy

- Granica sumy ciągów jest sumą granic.

Własności granicy

- Granica sumy ciągów jest sumą granic.
- Granica iloczynu to iloczyn granic (przykłady).

Własności granicy

- Granica sumy ciągów jest sumą granic.
- Granica iloczynu to iloczyn granic (przykłady).
- Twierdzenie o trzech ciągach:
  Jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ oraz ciągi a_n, c_n są zbieżne do wspólnej granicy g, to b_n również zbiega do g.
  Przykład:
  $$b_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$$

Podciągi

Załóżmy, że mamy dany ciąg x_n. Wybierzmy teraz niektóre wyrazy tego ciągu, np.

$$x_3, x_8, x_9, x_{25}, x_{33}, \ldots$$

w taki sposób, że numery wyrazów są uporządkowane rosnąco. Otrzymujemy w ten sposób inny ciąg, który jest *podciągiem* ciągu x_n.

Podciągi

Załóżmy, że mamy dany ciąg x_n. Wybierzmy teraz niektóre wyrazy tego ciągu, np.

$$x_3, x_8, x_9, x_{25}, x_{33}, \ldots$$

w taki sposób, że numery wyrazów są uporządkowane rosnąco. Otrzymujemy w ten sposób inny ciąg, który jest *podciągiem* ciągu x_n.

Jeśli ciąg jest zbieżny, to dowolny jego podciąg też jest zbieżny (do tej samej granicy).

Podciągi

Załóżmy, że mamy dany ciąg x_n. Wybierzmy teraz niektóre wyrazy tego ciągu, np.

$$x_3, x_8, x_9, x_{25}, x_{33}, \ldots$$

w taki sposób, że numery wyrazów są uporządkowane rosnąco. Otrzymujemy w ten sposób inny ciąg, który jest *podciągiem* ciągu x_n.

Jeśli ciąg jest zbieżny, to dowolny jego podciąg też jest zbieżny (do tej samej granicy).

A na odwrót?

Granica górna i dolna

Rozważmy następujący ciąg:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie jest zbieżny, ale ma podciągi zbieżne do 0 i do 1.

Granica górna i dolna

Rozważmy następujący ciąg:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie jest zbieżny, ale ma podciągi zbieżne do 0 i do 1.

Mówimy, że 0 i 1 są *punktami skupienia* tego ciągu.

Granica górna i dolna

Rozważmy następujący ciąg:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie jest zbieżny, ale ma podciągi zbieżne do 0 i do 1.

Mówimy, że 0 i 1 są *punktami skupienia* tego ciągu.

Z grubsza: największy punkt skupienia to granica górna, a najmniejszy to granica dolna ciągu.

Szeregi

Przykład. Spróbujmy obliczyć sumę wyrazów ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Możemy to zapisać jako ciąg: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\dots$, który nazywamy szeregiem

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Szereg jest zbieżny, jeśli ciąg x_n jest zbieżny.
Suma szeregu $\sum a_n$ to granica ciągu x_n.

Szeregi (2)

Szereg z powyższego przykładu to szereg geometryczny. Jest on zbieżny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \; .$$

W ogólności suma szeregu geometrycznego o wyrazach

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

dla $|q| < 1$ wynosi

$$\sum a_n = \frac{a_0}{1-q} \; .$$

Pewien ważny szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

- zbieżny dla $p > 1$
- rozbieżny dla $p \leqslant 1$

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

- Warunek konieczny: $\lim a_n = 0$.
  Nie jest to warunek wystarczający!
  Na przykład: czy $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

- Warunek konieczny: $\lim a_n = 0$.
  Nie jest to warunek wystarczający!
  Na przykład: czy $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?
- Kryterium porównawcze: jeśli $\sum c_n$ jest zbieżny oraz $|a_n| \leqslant c_n$, to $\sum a_n$ też jest zbieżny.

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

- Warunek konieczny: $\lim a_n = 0$.
  Nie jest to warunek wystarczający!
  Na przykład: czy $\sum a_n = \sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?
- Kryterium porównawcze: jeśli $\sum c_n$ jest zbieżny oraz $|a_n| \leqslant c_n$, to $\sum a_n$ też jest zbieżny.
- Kryterium d'Alemberta: dla $a_n > 0$ jeśli $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$ to $\sum a_n$ zbieżny.

Liczba e

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Jest on zbieżny (jak to udowodnić?).

Sumę tego szeregu oznaczamy e. Jest to, podobnie jak π, ważna liczba.
Przybliżoną wartość $e \simeq 2,7183\ldots$ można szybko obliczyć z powyższego szeregu — wystarczy zsumować niewielką liczbę wyrazów.

Liczba e

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Jest on zbieżny (jak to udowodnić?).

Sumę tego szeregu oznaczamy e. Jest to, podobnie jak π, ważna liczba.
Przybliżoną wartość $e \simeq 2,7183\ldots$ można szybko obliczyć z powyższego szeregu — wystarczy zsumować niewielką liczbę wyrazów.
Jeśli sumę n wyrazów oznaczymy s_n, to błąd można oszacować: $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$.

Liczba e

Rozpatrzmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Jest on zbieżny (jak to udowodnić?).

Sumę tego szeregu oznaczamy e. Jest to, podobnie jak π, ważna liczba.
Przybliżoną wartość $e \simeq 2,7183\ldots$ można szybko obliczyć z powyższego szeregu — wystarczy zsumować niewielką liczbę wyrazów.
Jeśli sumę n wyrazów oznaczymy s_n, to błąd można oszacować: $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$.
Tego oszacowania można użyć do dowodu niewymierności e.

Zbieżność „warunkowa” i „bezwzględna”

Co się dzieje, kiedy wyrazy szeregu są na różnych znaków, na przykład na przemian dodatnie i ujemne?

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Zbieżność „warunkowa” i „bezwzględna”

Co się dzieje, kiedy wyrazy szeregu są na różnych znaków, na przykład na przemian dodatnie i ujemne?

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Mowimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny *bezwzględnie*, jeśli $\sum |a_n|$ jest zbieżny.
Jeśli $\sum a_n$ jest zbieżny, a $\sum |a_n|$ nie — wtedy mówimy o zbieżności *warunkowej*.
Szereg $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny warunkowo.

Zmiana kolejności sumowania

Jeśli szereg ma wyrazy dodatnie lub jest zbieżny bezwzględnie, wtedy można przestawiać wyrazy.

Zmiana kolejności sumowania

Jeśli szereg ma wyrazy dodatnie lub jest zbieżny bezwzględnie, wtedy można przestawiać wyrazy.

W innym przypadku (np. szeregów zbieżnych warunkowo) przestawianie lub grupowanie wyrazów może zmienić wynik!

Zmiana kolejności sumowania

Jeśli szereg ma wyrazy dodatnie lub jest zbieżny bezwzględnie, wtedy można przestawiać wyrazy.

W innym przypadku (np. szeregów zbieżnych warunkowo) przestawianie lub grupowanie wyrazów może zmienić wynik!

Przykład:

$$\sum (-1)^n$$