Elementy matematyki

Daniel Wójcik

Szymon Łęski
d.wojcik@nencki.gov.pl
s.leski@nencki.gov.pl

www.neuroinf.pl/Members/szleski/swps

Instytut Biologii Doświadczalnej im. M. Nenckiego
Warszawa, Polska

Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

Liczby zespolone — punkty na płaszczyźnie

Liczb zespolone możemy interpretować jako punkty na płaszczyźnie. Możemy też myśleć o nich jako o wektorach zaczepionych w początku układu współrzędnych. Wtedy dodawanie liczb zespolonych jest równoważne dodawaniu wektorów (reguła równoległoboku).

Jaka jest interpretacja mnożenia liczb zespolonych?

Miara łukowa kąta

Jak mierzymy kąt między dwoma prostymi?
Miara łukowa — miarą kąta jest długość łuku okręgu o promieniu jednostkowym. Jednostką jest radian.

$$\pi = 180^\circ$$

Współrzędne biegunowe

Zamiast współrzędnych kartezjańskich (x, y) możemy też używać współrzędnych biegunowych (r, φ). r to odległość z od 0, a φ to kąt jaki wektor $(\mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z)$ tworzy z osią OX liczony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Związek między a, b a r, φ jest dany następującymi wzorami:

1. $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$
2. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

   $\sin\varphi = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Moduł i argument

- Modułem liczby $z = a + bi$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Jeżeli $z \neq 0$, to argumentem liczby z nazywamy liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

i oznaczamy ją $\arg(z)$.

Moduł i argument

- Modułem liczby $z = a + bi$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywistą $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Jeżeli $z \neq 0$, to argumentem liczby z nazywamy liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

  i oznaczamy ją $\arg(z)$.

Argument liczby zespolonej dany jest z dokładnością do wielokrotności kąta pełnego, czyli 2π. Wartość argumentu z przedziału $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ nazywamy argumentem głównym z i oznaczamy $\mathrm{Arg}(z)$.

Własności modułu i argumentu:

Mamy zatem dwa rozkłady liczby zespolonej:

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Własności modułu i argumentu:

1. $z\bar{z} = |z|^2$
2. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
3. $|\bar{z}| = |z|$
4. $\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$
5. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
6. $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

[Dowody?]

- Nierówność trójkąta
  Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi
  1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
  2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

- Nierówność trójkąta
  Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi
  1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
  2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$
- Pierwiastkiem stopnia n z $z \in \mathbb{C}$ nazywamy taką liczbę z, że $z^n = w$.

- Nierówność trójkąta
  Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zachodzi
  1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
  2. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$
- Pierwiastkiem stopnia n z $z \in \mathbb{C}$ nazywamy taką liczbę z, że $z^n = w$.
- Wzór de Moivre'a
  Jeżeli $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ to
  $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Pierwiastki z jedynki

Ustalmy liczbę naturalną n. Szukamy liczb zespolonych z takich, że

$$z^n = 1 \, .$$

Pierwiastki z jedynki

Ustalmy liczbę naturalną n. Szukamy liczb zespolonych z takich, że

$$z^n = 1 \ .$$

Istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych z o tej własności. Są one położone na okręgu jednostkowym, gdyż

$$|z^n| = |z|^n = 1 \ .$$

Ich argumenty $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ muszą spełniać

$$n\varphi_k = 0$$

(z dokładnością do wielokrotności 2π).

Pierwiastki z liczby zespolonej

- Twierdzenie
  Dla każdej niezerowej liczby zespolonej z istnieje dokładnie n pierwiastków n-go stopnia i są one dane wzorem

$$w_k := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

$\sqrt[n]{|z|}$ jest zwykłym pierwiastkiem rzeczywistym z modułu z, a $\varphi = \arg(z)$.

Pierwiastki z liczby zespolonej

- Twierdzenie
  Dla każdej niezerowej liczby zespolonej z istnieje dokładnie n pierwiastków n-go stopnia i są one dane wzorem

  $$w_k := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

  $\sqrt[n]{|z|}$ jest zwykłym pierwiastkiem rzeczywistym z modułu z, a $\varphi = \arg(z)$.
- $\sqrt{i}$
- $\sqrt[3]{1}$

Funkcje, odwzorowania

Załóżmy, że mamy dwa zbiory: A i B. Przypiszmy teraz każdemu elementowi zbioru A pewien element zbioru B:

$$A \ni a \mapsto b \in B \ .$$

Takie przyporządkowanie nazywamy *odwzorowaniem* lub *funkcją* i piszemy

$$f : A \to B \ , \qquad f(a) = b \ .$$

Nazwy „funkcja” używa się zwykle, gdy A i B to zbiory liczb. Funkcja to jedno z najbardziej podstawowych pojęć w matematyce. $[*]$

Funkcje, odwzorowania

Załóżmy, że mamy dwa zbiory: A i B. Przypiszmy teraz każdemu elementowi zbioru A pewien element zbioru B:

$$A \ni a \mapsto b \in B \ .$$

Takie przyporządkowanie nazywamy *odwzorowaniem* lub *funkcją* i piszemy

$$f : A \to B \ , \qquad f(a) = b \ .$$

Nazwy „funkcja” używa się zwykle, gdy A i B to zbiory liczb.
Funkcja to jedno z najbardziej podstawowych pojęć w matematyce. $[*]$
Dziedzina funkcji: zbiór A.

Wykresy funkcji

Wykres funkcji to zbiór punktów na płaszczyźnie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in A\}$$

Podstawowe własności funkcji

Monotoniczność 1) funkcja (ściśle) rosnąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2) funkcja (ściśle) malejąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Podstawowe własności funkcji

Monotoniczność 1) funkcja (ściśle) rosnąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2) funkcja (ściśle) malejąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja jest okresowa z okresem T, jeśli

$$f(x) = f(x + T)$$

Podstawowe własności funkcji

Monotoniczność 1) funkcja (ściśle) rosnąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

2) funkcja (ściśle) malejąca:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Funkcja jest okresowa z okresem T, jeśli

$$f(x) = f(x+T)$$

Funkcja parzysta, nieparzysta

$$f(x) = f(-x)\;, \qquad f(x) = -f(-x)$$

Przekształcenia wykresów

- Wykres funkcji $g(x) = f(x - a)$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w prawo.

Przekształcenia wykresów

- Wykres funkcji $g(x) = f(x - a)$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w prawo.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x) + a$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w górę.

Przekształcenia wykresów

- Wykres funkcji $g(x) = f(x-a)$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w prawo.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x) + a$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w górę.
- Wykres funkcji $g(x) = f(a \cdot x)$ jest zagęszczony a razy w stosunku do wykresu $f(x)$

Przekształcenia wykresów

- Wykres funkcji $g(x) = f(x - a)$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w prawo.
- Wykres funkcji $g(x) = f(x) + a$ jest przesunięty w stosunku do wykresu funkcji $f(x)$ o a w górę.
- Wykres funkcji $g(x) = f(a \cdot x)$ jest zagęszczony a razy w stosunku do wykresu $f(x)$
- Wykres funkcji $g(x) = a \cdot f(x)$ jest przeskalowany a razy w stosunku do wykresu $f(x)$

Obraz, przeciwobraz

Niech

$$f : A \to B \ .$$

Obrazem funkcji f nazywamy zbiór tych elementów B, które są wartościami $f(x)$ dla pewnego $x \in A$. Zapisujemy to $f(A)$.

Obraz, przeciwobraz

Niech

$$f : A \to B \ .$$

Obrazem funkcji f nazywamy zbiór tych elementów B, które są wartościami $f(x)$ dla pewnego $x \in A$. Zapisujemy to $f(A)$.

Przeciwobraz: niech C będzie podzbiorem B. Przeciwobraz C, oznaczany

$$f^{-1}(C) \ ,$$

to zbiór tych $x \in A$, dla których $f(x) \in C$.

Obraz, przeciwobraz

Niech

$$f : A \to B \ .$$

Obrazem funkcji f nazywamy zbiór tych elementów B, które są wartościami $f(x)$ dla pewnego $x \in A$. Zapisujemy to $f(A)$.

Przeciwobraz: niech C będzie podzbiorem B. Przeciwobraz C, oznaczany

$$f^{-1}(C) \ ,$$

to zbiór tych $x \in A$, dla których $f(x) \in C$.

Przykład: $sin^{-1}(\{0\})$.

Obraz, przeciwobraz

Niech

$$f : A \to B \ .$$

Obrazem funkcji f nazywamy zbiór tych elementów B, które są wartościami $f(x)$ dla pewnego $x \in A$. Zapisujemy to $f(A)$.

Przeciwobraz: niech C będzie podzbiorem B. Przeciwobraz C, oznaczany

$$f^{-1}(C) \ ,$$

to zbiór tych $x \in A$, dla których $f(x) \in C$.

Przykład: $sin^{-1}(\{0\})$.

Przykład 2: $f(x) = x^2 + 1$, $f^{-1}([2,3]) =?$, $f^{-1}([-1,0]) =?$

Bijekcja, surjekcja, iniekcja

- Surjekcja: funkcja $f : A \rightarrow B$ jest surjekcją, jeśli $f(A) = B$, to znaczy cały zbiór B jest obrazem. Mówimy też, że f jest *na* B.
  Czy $f(x) = sin(x)$ jest surjekcją?

Bijekcja, surjekcja, iniekcja

- Surjekcja: funkcja $f : A \to B$ jest surjekcją, jeśli $f(A) = B$, to znaczy cały zbiór B jest obrazem. Mówimy też, że f jest *na* B.
  Czy $f(x) = sin(x)$ jest surjekcją?
- Iniekcja: funkcja różnowartościowa, to znaczy

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Funkcja monotoniczna jest różnowartościowa.

Bijekcja, surjekcja, iniekcja

- Surjekcja: funkcja $f : A \longrightarrow B$ jest surjekcją, jeśli $f(A) = B$, to znaczy cały zbiór B jest obrazem. Mówimy też, że f jest *na* B.
  Czy $f(x) = sin(x)$ jest surjekcją?
- Iniekcja: funkcja różnowartościowa, to znaczy

  $$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

  Funkcja monotoniczna jest różnowartościowa.
- Bijekcja: to funkcja różnowartościowa i „na”, czyli surjekcja i iniekcja jednocześnie.

Funkcja odwrotna

Przykład. Niech $y = f(x) = 3 * x + 7$. Czy możemy obliczyć x znając y?

Tak, $x = \frac{y}{3} - \frac{7}{3}$. Jest to *funkcja odwrotna* do f.

Funkcja odwrotna

Przykład. Niech $y = f(x) = 3 * x + 7$. Czy możemy obliczyć x znając y?

Tak, $x = \frac{y}{3} - \frac{7}{3}$. Jest to *funkcja odwrotna* do f.

Okazuje się, że funkcja odwrotna do f istnieje wtedy i tylko wtedy gdy f jest bijekcją.

Funkcja odwrotna

Przykład. Niech $y = f(x) = 3 * x + 7$. Czy możemy obliczyć x znając y?

Tak, $x = \frac{y}{3} - \frac{7}{3}$. Jest to *funkcja odwrotna* do f.

Okazuje się, że funkcja odwrotna do f istnieje wtedy i tylko wtedy gdy f jest bijekcją.

Przykład. Niech f będzie określona na liczba dodatnich ($x \geqslant 0$) wzorem $f(x) = x^2 + 1$. Na jakim zbiorze można określić funkcję odwrotną?

Funkcja odwrotna

Przykład. Niech $y = f(x) = 3 * x + 7$. Czy możemy obliczyć x znając y?

Tak, $x = \frac{y}{3} - \frac{7}{3}$. Jest to *funkcja odwrotna* do f.

Okazuje się, że funkcja odwrotna do f istnieje wtedy i tylko wtedy gdy f jest bijekcją.

Przykład. Niech f będzie określona na liczba dodatnich ($x \geqslant 0$) wzorem $f(x) = x^2 + 1$. Na jakim zbiorze można określić funkcję odwrotną?

Wykres funkcji odwrotnej.

Relacje

Jeśli funkcja f nie jest różnowartościowa, to nie istnieje funkcja odwrotna. Można jednak określić *relację* odwrotną. Przykład: $f(x) = sin(x)$.

Równoliczność zbiorów

Czy między każdymi dwoma zbiorami istnieje bijekcja?

Równoliczność zbiorów

Czy między każdymi dwoma zbiorami istnieje bijekcja?

Nie, weźmy na przykład $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q\}$.

Równoliczność zbiorów

Czy między każdymi dwoma zbiorami istnieje bijekcja?

Nie, weźmy na przykład $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q\}$.

Widzimy, że aby istniała bijekcja między zbiorami skończonymi, muszą one mieć tyle samo elementów.

Równoliczność zbiorów

Czy między każdymi dwoma zbiorami istnieje bijekcja?

Nie, weźmy na przykład $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{p, q\}$.

Widzimy, że aby istniała bijekcja między zbiorami skończonymi, muszą one mieć tyle samo elementów.

Jak jest w przypadku zbiorów nieskończonych? Na odwrót: tutaj mówimy, że mają one tyle samo elementów (są równoliczne), jeśli istnieje bijekcja.

Ile jest liczb parzystych?

Można zatem zapytać na przykład: czy liczb parzystych jest tyle samo co naturalnych?

Ile jest liczb parzystych?

Można zatem zapytać na przykład: czy liczb parzystych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb całkowitych jest tyle samo co naturalnych?

Ile jest liczb parzystych?

Można zatem zapytać na przykład: czy liczb parzystych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb całkowitych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb wymiernych jest tyle samo co całkowitych?

Ile jest liczb parzystych?

Można zatem zapytać na przykład: czy liczb parzystych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb całkowitych jest tyle samo co naturalnych?

Czy liczb wymiernych jest tyle samo co całkowitych?

Czy liczb rzeczywistych jest tyle samo co wymiernych?

Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \; .$$

x_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli x_n są liczbami, mówimy o ciągu liczbowym.

Ciągi

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych:

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \ .$$

x_n nazywamy n-tym wyrazem ciągu. Jeśli x_n są liczbami, mówimy o ciągu liczbowym.

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$,
$x_1 = 1, \ x_n = 2 * x_{n-1}$.

Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \to \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Ścisła definicja: x jest granicą ciągu x_n, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$.

Zbieżność ciągów

Ważnym pojęciem jest *granica ciągu*. Niektóre ciągi mają tę własność, że ich wyrazy zbliżają się do pewnej liczby przy $n \longrightarrow \infty$, mówimy że są to ciągi zbieżne.

Ścisła definicja: x jest granicą ciągu x_n, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie że

$$n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Przykłady: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \longrightarrow 0$.

Szeregi

Przykład. Spróbujmy obliczyć sumę wyrazów ciągu $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Możemy to zapisać jako ciąg: $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \ldots,$ który nazywamy szeregiem

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Szereg jest zbieżny, jeśli ciąg x_n jest zbieżny.

Szeregi (2)

Szereg z powyższego przykładu (geometryczny) jest zbieżny:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \; .$$

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

Na przykład: czy $\sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

Na przykład: czy $\sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

- Kryterium d'Alamberta: $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$
- Kryterium Raabego: $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Kryteria zbieżności szeregów

Jeśli mamy podany wzór na szereg liczbowy, może nie być oczywiste, czy szereg ten jest zbieżny.

Na przykład: czy $\sum \frac{1}{n}$ jest zbieżny?

- Kryterium d'Alamberta: $\lim \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$
- Kryterium Raabego: $\lim n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

Szereg $\sum \frac{1}{n}$ jest rozbieżny.

Zbieżność „względna” i „bezwzględna”

Co się dzieje, kiedy wyrazy szeregu są na przemian dodatnie i ujemne?

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Liczby wymierne i niewymierne

Czy liczba niewymierna podnisiona do niewymiernej potęgi może dać liczbę wymierną?