Zadania, seria 1

Termin oddania: 16.10.2007
Należy oddać rozwiązane zadania nr 1(b,e,f), 2(a lub b, c lub d), 4, 5, 8b, 9 (a,c)

1. Rozwiąż tam gdzie to możliwe: (i) w liczbach naturalnych, (ii) w liczbach całkowitych (iii) w liczbach wymiernych następujące równania:
   (a) $3x + 1 = 4$
   (b) $3x + 10 = 4$
   (c) $3x + 11 = 15$
   (d) $x^2 = 16$
   (e) $9x^2 = 16$
   (f) $7x^2 = 16$
2. Niech $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 3 - 2i$, $z_4 = -5i$. Policz
   (a) $z_1 + z_2$
   (b) $z_3 + z_4$
   (c) $z_1 z_2$
   (d) $z_3 z_4$
   (e) z_2^2
   (f) z_3^3
   (g) $z_1 + z_3$
   (h) $z_1 z_3$
3. Znajdź liczbę zespoloną $a + bi$ taką, że $(a + bi)(3 - 2i) = 1$.
4. Znajdź rozwiązanie równania $(3 - 2i)z = 5 + i$.
5. Przedstaw $\dfrac{2-i}{3+4i}$ w postaci $c + di$.
6. Dla liczb zespolonych z zadania 2 oblicz z_1/z_2, z_1/z_3, z_3/z_4. Wyniki podaj w postaci $c + di$.
7. Jeśli $a + bi = c + di$, gdzie a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi, to $a - c = i(b - d)$ oraz $(a - c)^2 = -(d - b)^2$. Co można z tego wywnioskować?
8. Jak wiemy, suma pierwiastków rzeczywistych równania $ax^2 + bx + c = 0$ wynosi $-\frac{b}{a}$ a ich iloczyn $\frac{c}{a}$. Rozwiąż następujące równania i w każdym przypadku znajdź sumę i iloczyn odpowiadających im pierwiastków. Czy dla pierwiastków zespolonych powyższe wzory też mają zastosowanie?
   (a) $x^2 + 7 = 0$
   (b) $x^2 + 4x + 29 = 0$
   (c) $x^2 + 6x + 4 = 0$

(d) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(e) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

9. Znajdź równania kwadratowe o pierwiastkach

   (a) $6 + 2i, 6 - 2i$

   (b) $3i + 4, 3i - 4$

   (c) $5 - 3i, 2 - 7i$

   (d) $1 - 4i, 1 + 4i$

10. Jeżeli $a + bi$ jest jednym z pierwiastków równania kwadratowego o współczynnikach rzeczywistych, to co można powiedzieć o drugim pierwiastku?

11. Dowieść tożsamości

$$z^2 + 4 = (z - 1 - i)(z - 1 + i)(z + 1 + i)(z + 1 - i)$$

12. Dla jakich liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$\frac{(x-4) + (y-1)i}{1+i} = 2 - 5i$$