Układy dynamiczne
Chaos deterministyczny

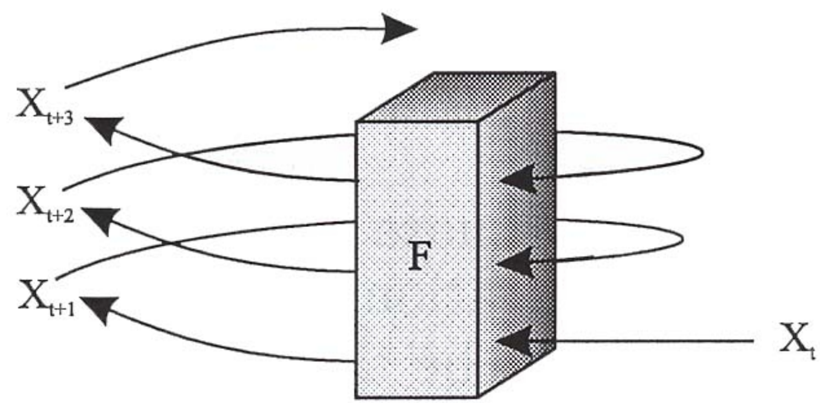
- Proste iteracje odwzorowań:
  - Funkcja liniowa
  - Funkcja logistyczna

- chaos deterministyczny
- automaty komórkowe

Ewolucja układu dynamicznego

- Rozwój w czasie układu dynamicznego opisuje równanie ewolucji w postaci **wzoru iteracyjnego**

$$X_{n+1} = F_p(X_n)$$



- X_n i X_{n+1} opisują stan układu w chwili n i $n+1$
- F_p określa jakim zmianom ulega stan układu w kolejnych krokach iteracji

Przykład: algorytm Newtona

- Jak policzyć pierwiastek z a?
- Należy wybrać dowolną liczbę i iterować ją zgodnie z regułą

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

- Dlaczego?
  Jeżeli $x < \sqrt{a}$ to $\sqrt{a} * x < a$, a więc $\frac{a}{x} > \sqrt{a}$
  i na odwrót.

Przykład: pierwiastek z 2

- Weźmy $x_0=2$
- Wtedy
  - $x_1=1,5$
  - $x_2=1,416$
  - $x_3=1,414215$
  - $x_4=1,414213562374$
  - $x_5=1,4142135623730950488016 89$
  - ...
- I tak dalej

Kilka pojęć

- *Punkt stały*: stan układu, który się nie zmienia z czasem
- *Atraktor*: stan, do którego układ dąży z czasem
- *Dorzecze (basen) atraktora*: zbiór stanów początkowych, które dążą do danego atraktora

Przykład basenów atraktora

- Rozważmy odwzorowanie płaszczyzny

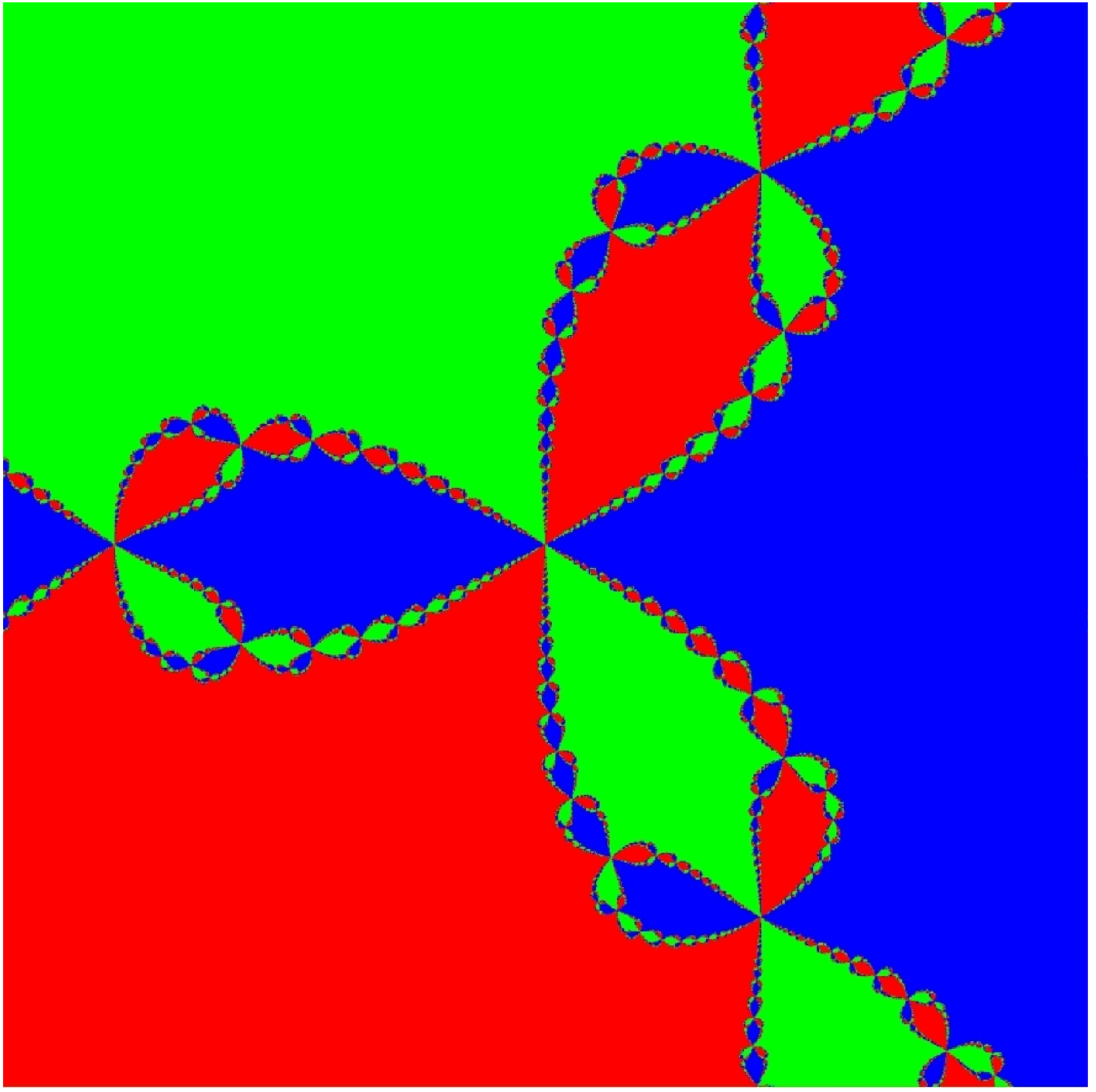
$$x_{t+1} = \frac{2}{3} x_t + \frac{1}{3} \frac{x_t^2 - y_t^2}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

$$y_{t+1} = \frac{2}{3} y_t - \frac{1}{3} \frac{2 x_t y_t}{(x_t^2 + y_t^2)^2}$$

- To odwzorowanie ma trzy atraktory:

$$(1,0), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

Baseny pierwiastków jedynki



Typowe atraktory

- Punkty stałe
- Cykle okresowe
- Dziwne atraktory (fraktale)

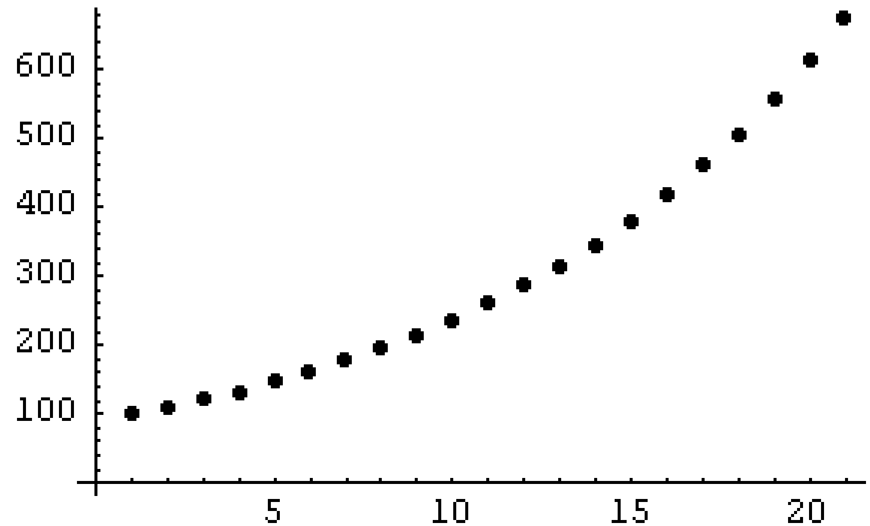
Przykład: funkcja liniowa

- Rozważmy populację bakterii o liczebności N_0. Codziennie jej liczebność rośnie R-krotnie. Oznaczmy przez N_t wielkość populacji po t dniach. Wtedy:

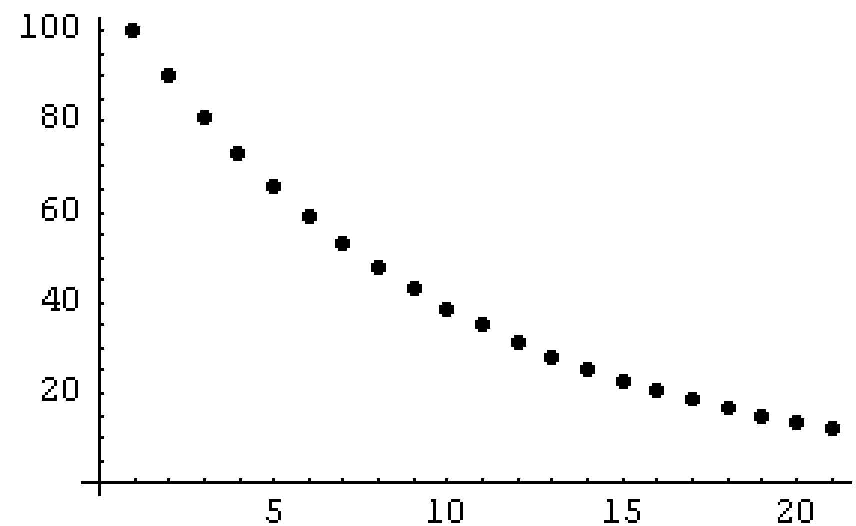
$$
\begin{aligned}
N_1 &= RN_0 \\
N_2 &= RN_1 = R^2 N_0 \\
&\vdots \\
N_t &= RN_{t-1} = R^t N_0
\end{aligned}
$$

Przykład: funkcja liniowa

- Stały wzrost ($R>1$)



- Stały rozpad ($R<1$)



Przykład: funkcja logistyczna

W praktyce wzrost populacji zwykle ograniczony jest przez czynniki środowiskowe, np. ilość dostępnego pożywienia, drapieżców, ograniczone zasoby, itp. Zatem wzrost nie jest stały. Przyjmijmy, że czynnik wzrostu R zależy od wielkości populacji: $R \longrightarrow R - bN_t$

$$\begin{aligned} N_t &= (R - bN_{t-1})N_{t-1} \\ &= RN_{t-1} - bN_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Przykład: funkcja logistyczna

Wprowadźmy nową zmienną.

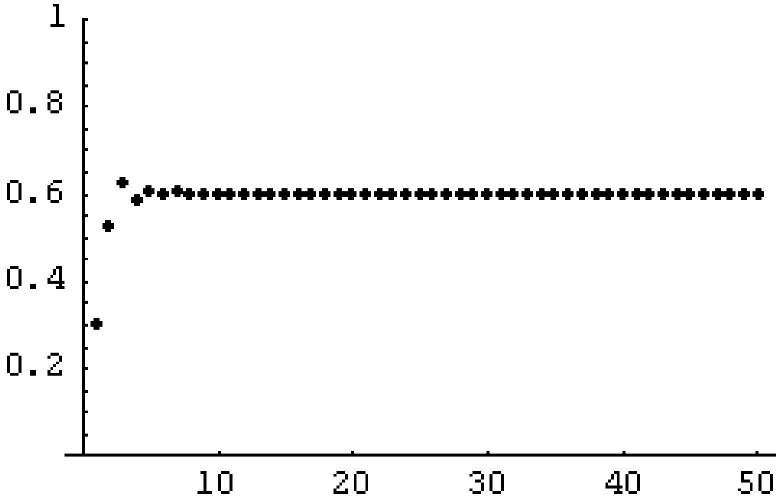
$$x_n = \frac{bN_t}{R}$$

Wtedy

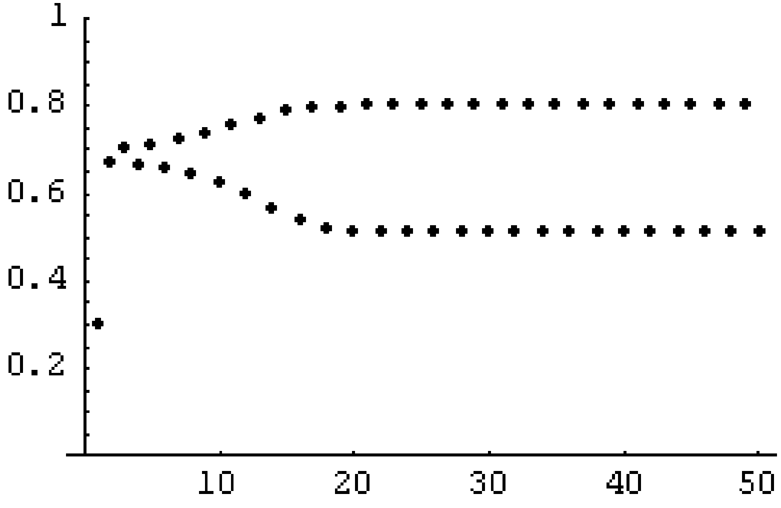
$$x_{n+1} = R(1 - x_n)x_n$$

Szereg czasowy

- W obszarze regularnym ($r = 2.5$)

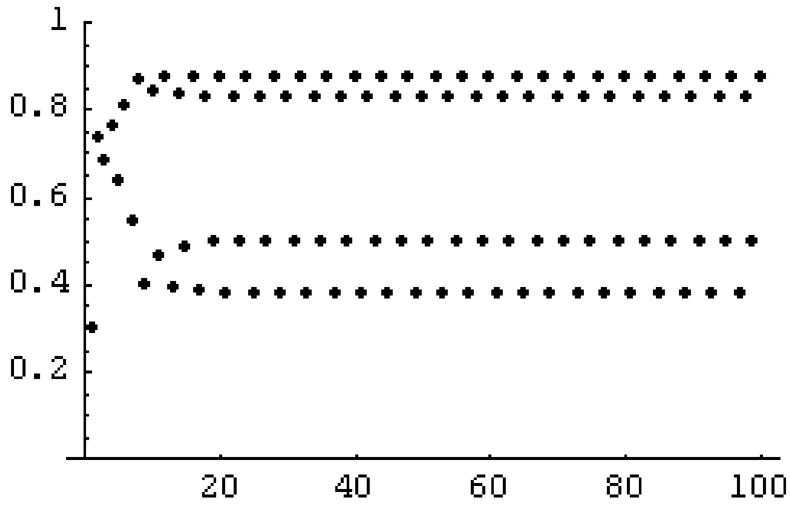


- W obszarze regularnym ($r = 3.2$)

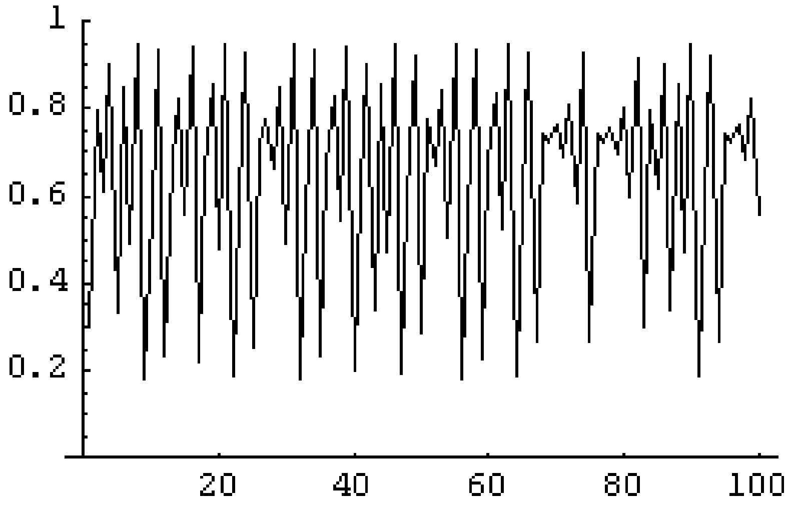


Szereg czasowy

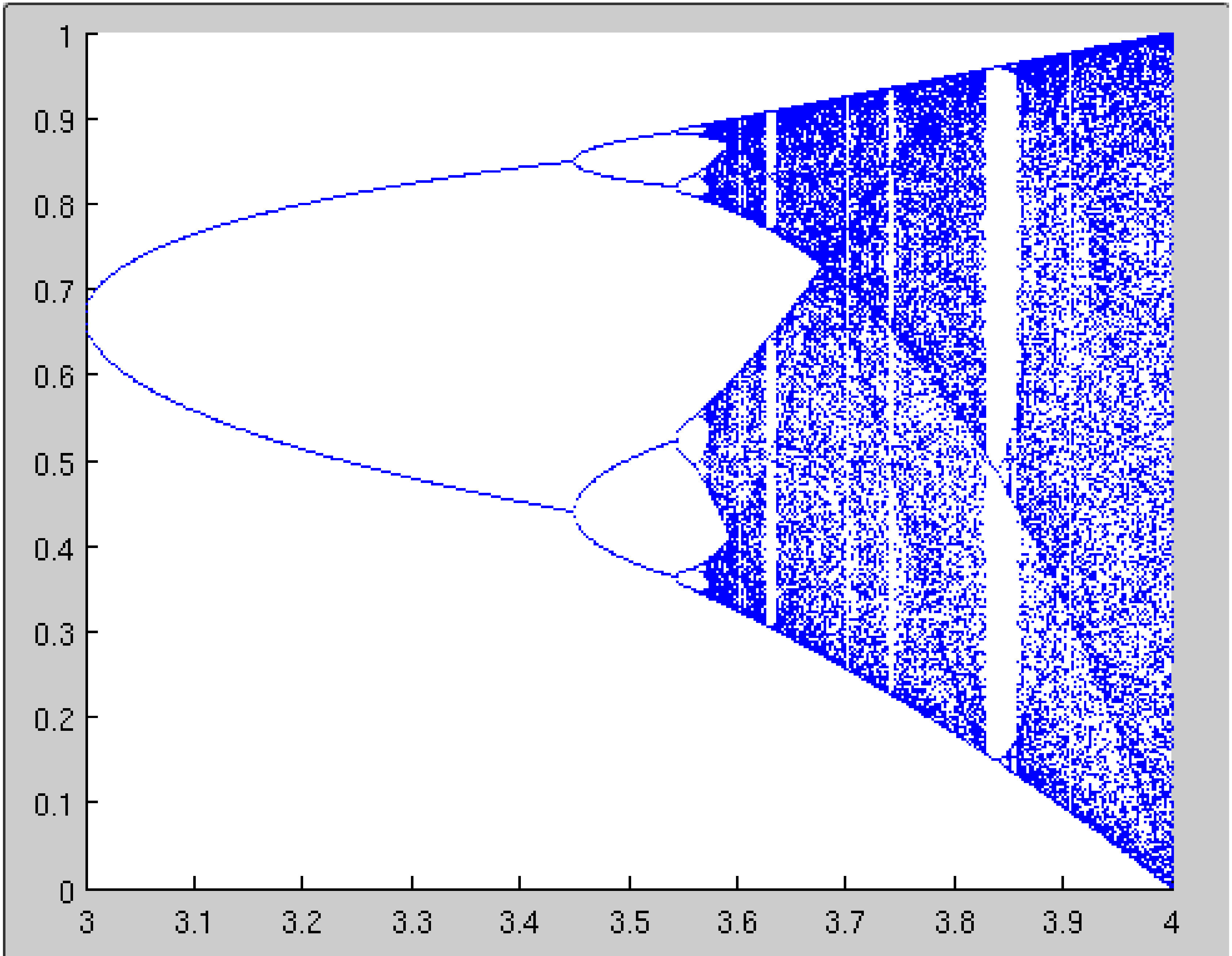
- W obszarze regularnym (r = 3.5)



- W obszarze chaotycznym (r = 3.7)

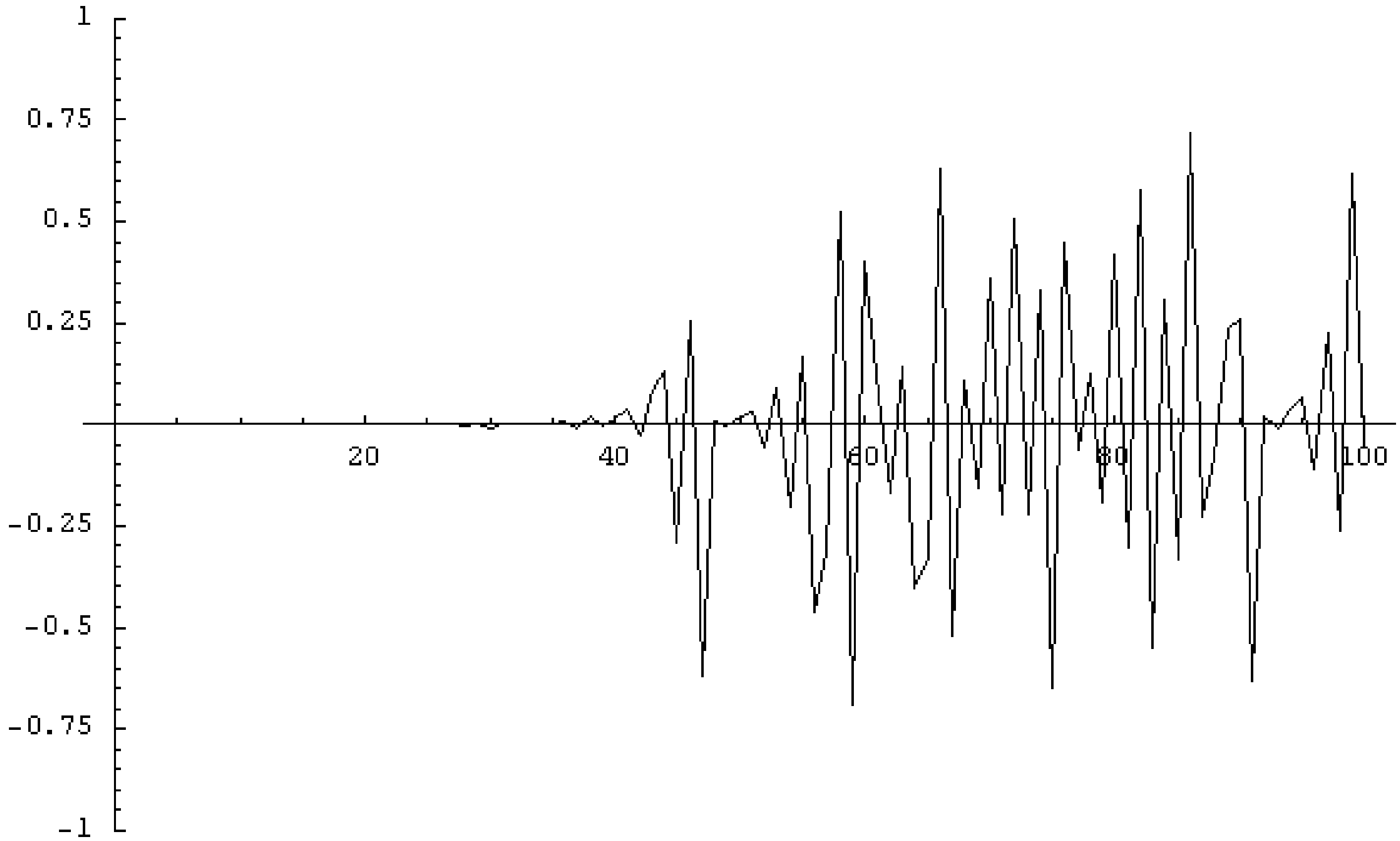


Wykres bifurkacyjny dla odwzorowania logistycznego



Chaos deterministyczny

- Czuła zależność od warunków początkowych: Rysunek pokazuje różnicę między historią dwóch populacji różniących się początkowo o 0.0000001



Iteracje płaszczyzny

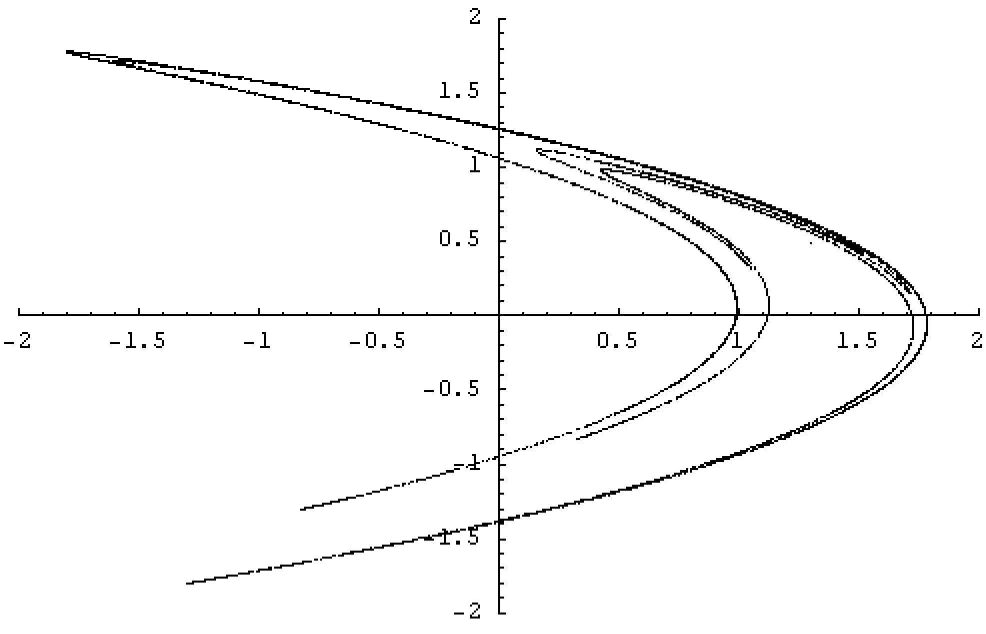
- Przykład dwuwymiarowy: odwzorowanie Henona

$$x_{n+1} = A - x_n^2 + B\, y_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

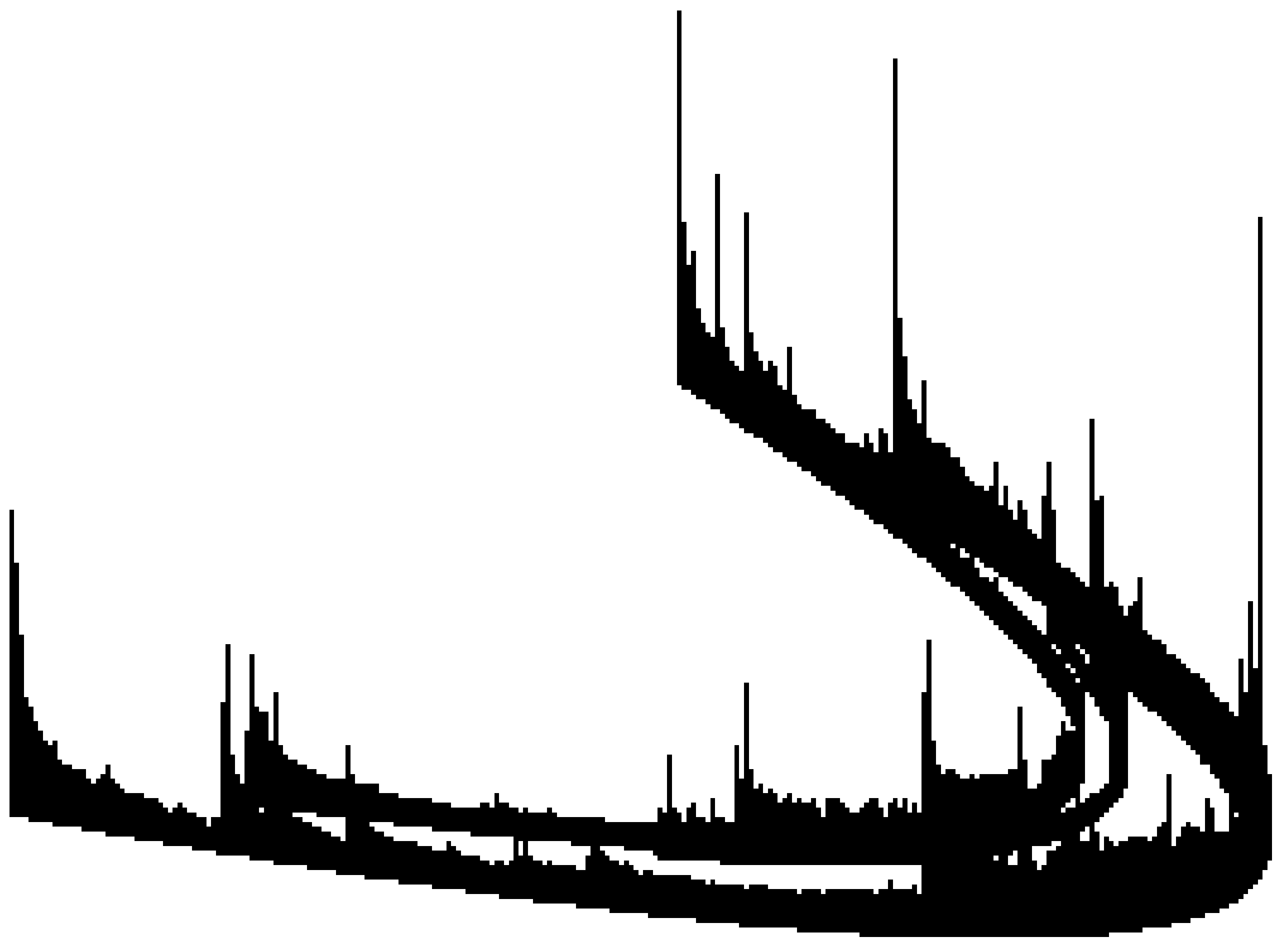
- A=1.4, B=0.3

Dziwny atraktor

Dla pewnych wartości parametrów *A* i *B*, odwzorowanie Henona dąży do atraktora, który jest fraktalem. Taki atraktor nazywamy **dziwnym**.



Prawdopodobieństwo odwiedzin obszarów na atraktorze

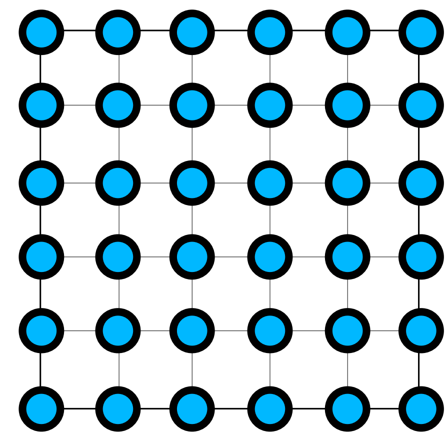


Automaty komórkowe

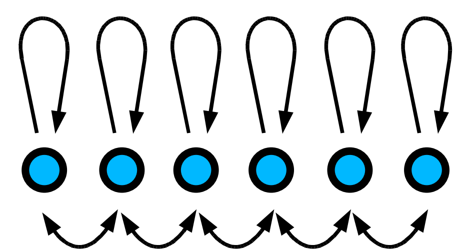
- identyczne elementy
- ułożone na regularnej sieci
- zmieniają stan synchronicznie
- zgodnie z identyczną regułą

Geometria jedno- i dwuwymiarowych automatów komórkowych

Geometria dwuwymiarowego automatu komórkowego w którym każda komórka ma 4 sąsiadów



Geometria jednowymiarowego automatu komórkowego w którym każda komórka ma 2 sąsiadów



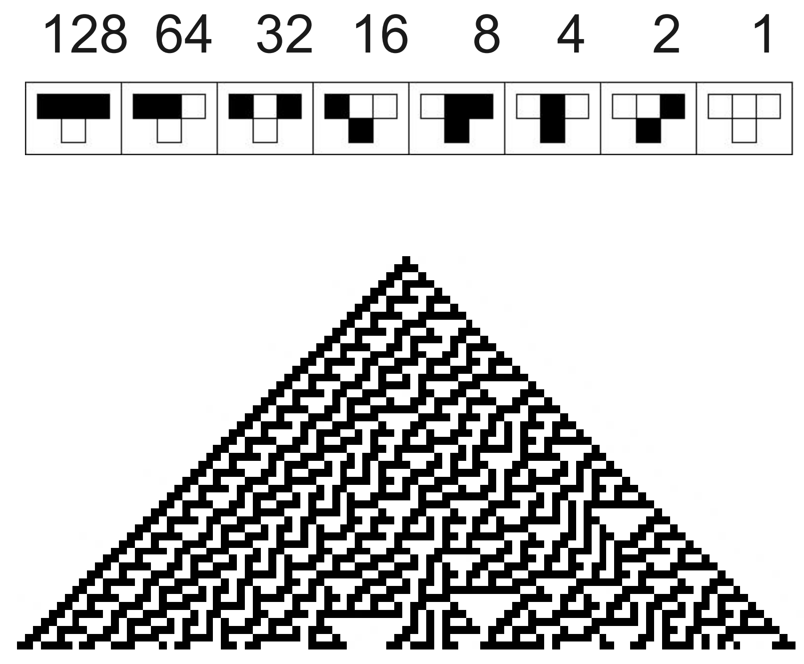
warunki brzegowe!

Jednowymiarowe automaty komórkowe

Jak zdefiniować automat komórkowy?

Dla każdego stanu komórki *n* i jej sąsiadów *n+1* i *n-1* w chwili *t* trzeba określić stan komórki *n* w chwili *t+1*

reguła 30



Jak to działa?

- rozważmy układ 10 komórek
- zacznijmy od stanu 0100000000
- reguła przejścia: stan komórki w chwili *t+1* równy jest sumie stanów komórki i jej sąsiada z lewej z chwili *t*
- wówczas ewolucja wygląda tak:

- 0100000000
- 0110000000
- 0121000000
- 0133100000
- 0146410000
- ...

wartości występujące w n-tym kroku tej ewolucji dane są przez współczynniki występujące w rozwinięciu dwumianu (a+b)^n

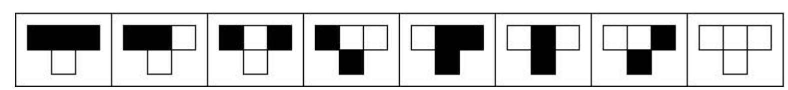
Kodowanie reguły

Każdemu układowi stanów komórki n i jej sąsiadów $n+1$ i $n-1$ w chwili t przypisujemy liczbę jak na rysunku obok

Kodem reguły jest suma liczb kodujących te trójki stanów, po których w chwili $t+1$ stan komórki n ma być 1

reguła 30

128 64 32 16 8 4 2 1

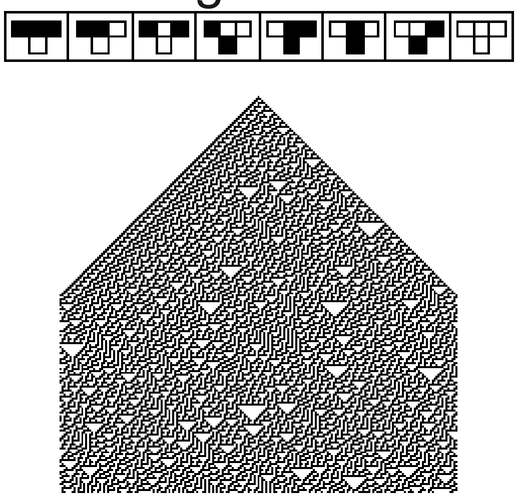


0 0 0 1 1 1 1 0

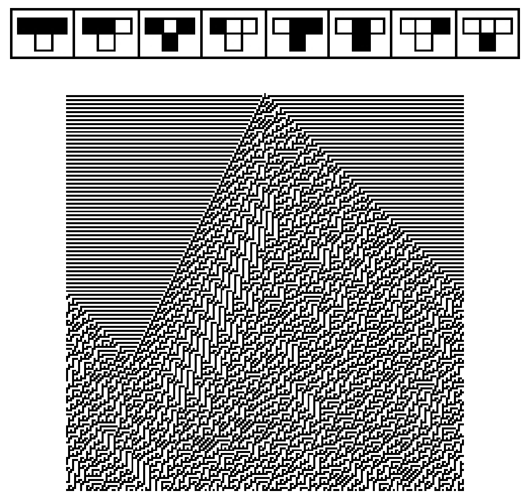
kod reguły = 16+8+4+2 = 30

Przykłady innych reguł

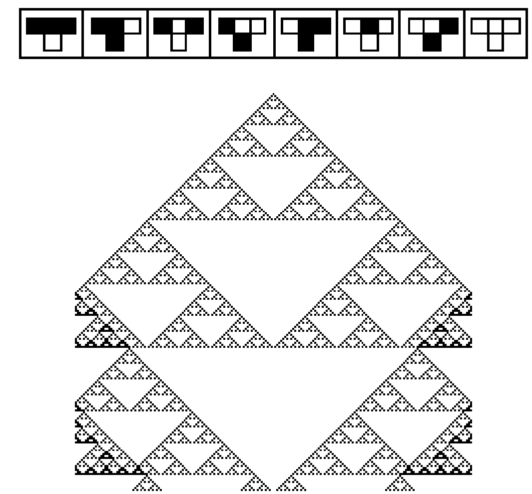
reguła 30



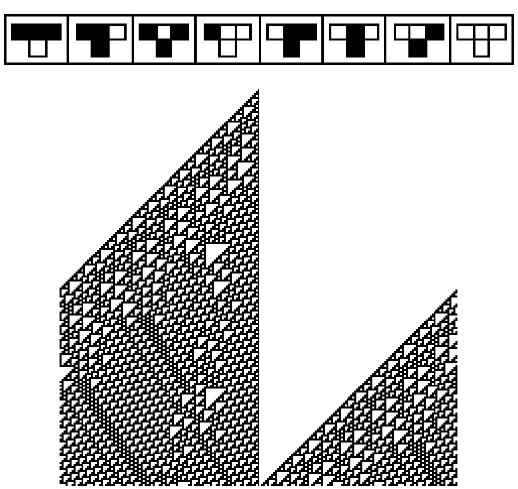
reguła 45



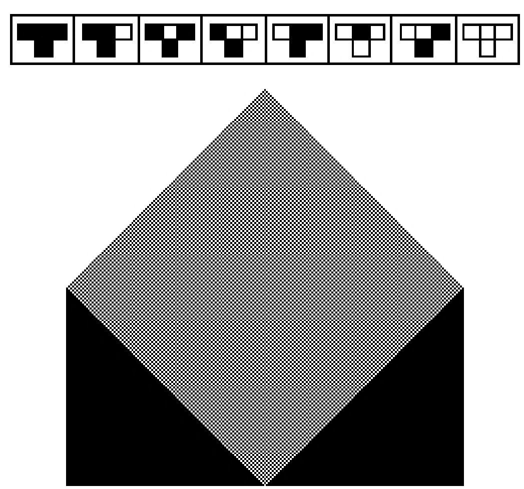
reguła 90



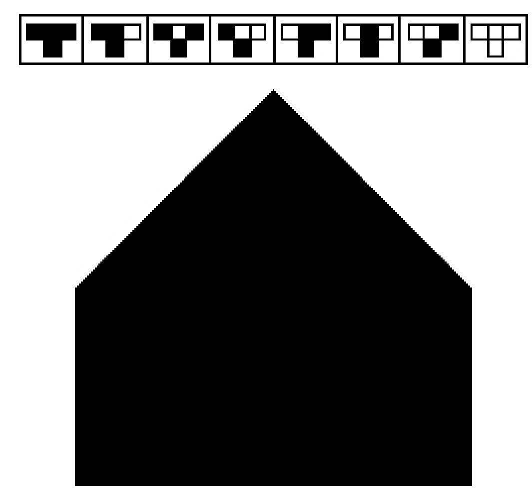
reguła 110



reguła 250



reguła 254



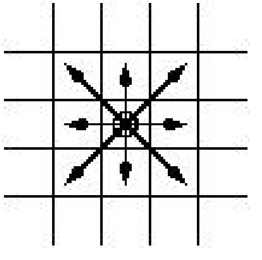
Gra w życie: historia

- Wymyślił ją John Conway pod koniec lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku
- Rozpropagował Martin Gardner w latach siedemdziesiątych w “Scientific American”
- Program **Conway**

Gra w życie: reguły

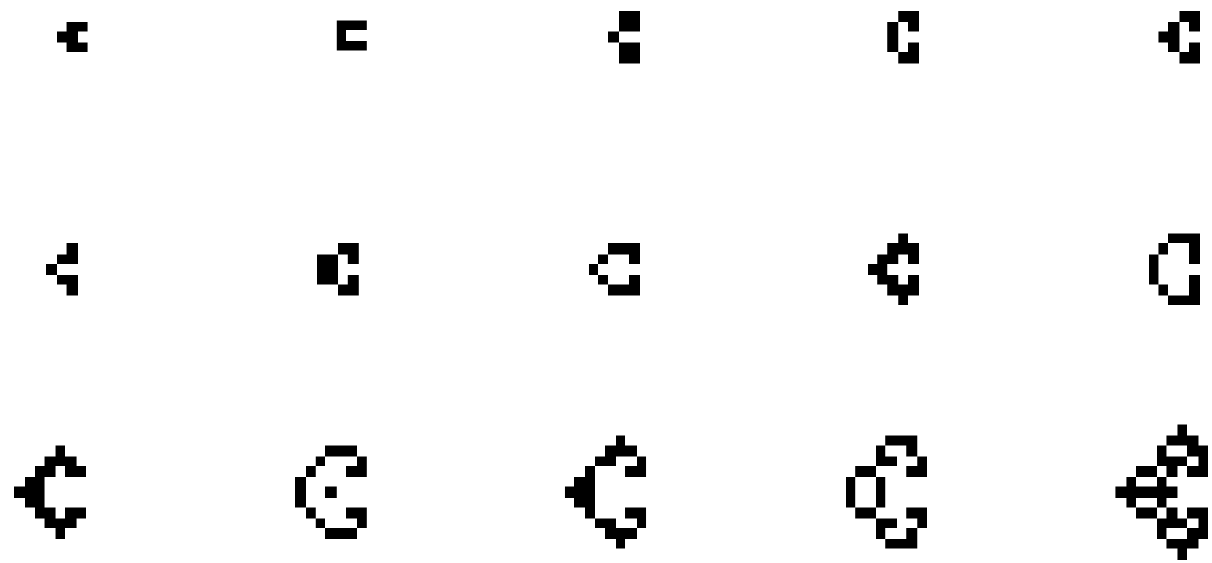
- Żywa komórka, mająca jednego żywego sąsiada lub mniej, umiera z osamotnienia
- Żywa komórka, mająca dwóch lub trzech żywych sąsiadów, jest szczęśliwa i żyje dalej
- Żywa komórka, mająca więcej niż trzech żywych sąsiadów, umiera z zatłoczenia
- Martwa komórka, mająca dokładnie trzech żywych sąsiadów, ożywa

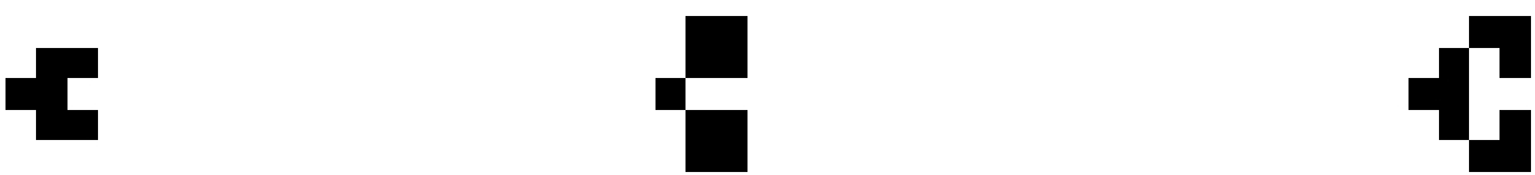
Ośmiu najbliższych sąsiadów danej komórki



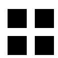
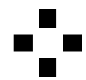
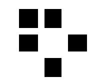
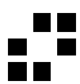
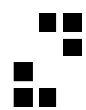
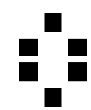
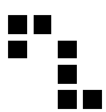
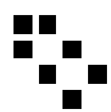
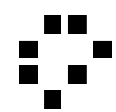
Gra w życie: przykłady

Ewolucja przykładowego
stanu 6-komórkowego





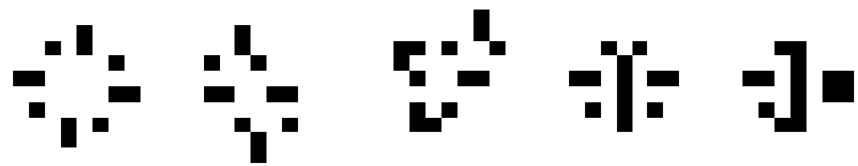
Gra w życie – martwa natura (still life)

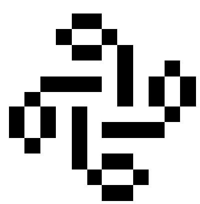
box		tub		boat		snake	
ship		aircraft carrier		beehive		barge	
eater/ fishhook		long boat		loaf		long snake	

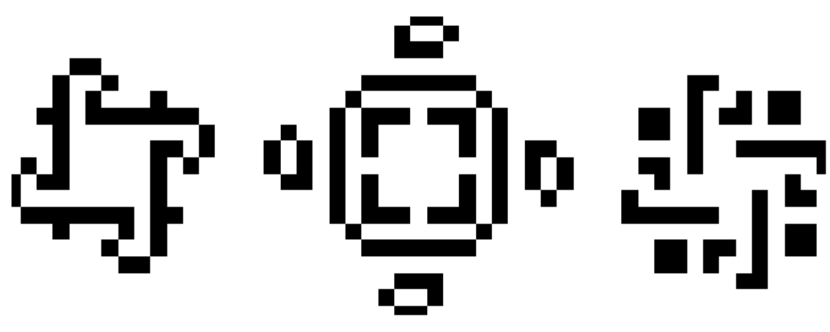
martwa natura (still life) – grupy komórek, które nie zmieniają się w czasie

Gra w życie – oscylatory

- Oscylatory, to konfiguracje, które powtarzają się po pewnej liczbie generacji

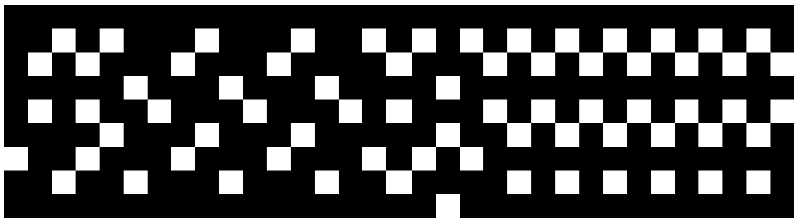


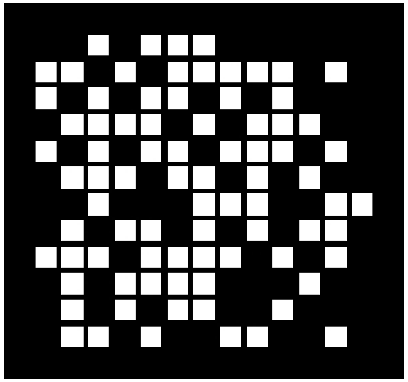




Gra w życie – rajskie ogrody

- Konfiguracja poprzedzająca daną nazywa się „rodzicem”
- Konfiguracje nie mające rodziców nazywają się „rajskimi ogrodami”





Rozbudowane modele

- Komórka może mieć więcej stanów:
  - kilka stanów (dyskretne), np. modele infekcji, epidemii, pożarów lasu, ośrodków pobudliwych
  - stany ciągłe, np. modele dyfuzji

Wyimaginowany model infekcji

- rozważmy automat komórkowy o trzech możliwych stanach: zdrowy, chory, odporny
- komórka zdrowa może zachorować, jeżeli przynajmniej jeden z jej sąsiadów jest chory
- po 6 krokach komórka chora staje się odporna na 4 kroki czasowe. W tym czasie nie zaraża i sama nie może być zarażona
- po 4 krokach komórka odporna staje się znowu zdrowa

Model dyfuzji

- Automaty mogą mieć nie tylko dyskretne stany, ale i ciągłe. Przykład:
- jednowymiarowy automat komórkowy. Stan komórki m jest dany stężeniem substancji w danym punkcie w czasie t
- Reguła przejścia dana jest wzorem:

$$c_{t+1}[m] = D(c_t[m+1] + c_t(m-1)) \\ +(1-2\mathrm{D})\, c_t[m]$$

Inne automaty komórkowe

- gazy sieciowe
- kupki piasku (SOC – self organized criticality)
- **przepływ przez materiały porowate**
- korki w ruchu ulicznym
- pożary lasu
- modele społeczeństwa