MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula

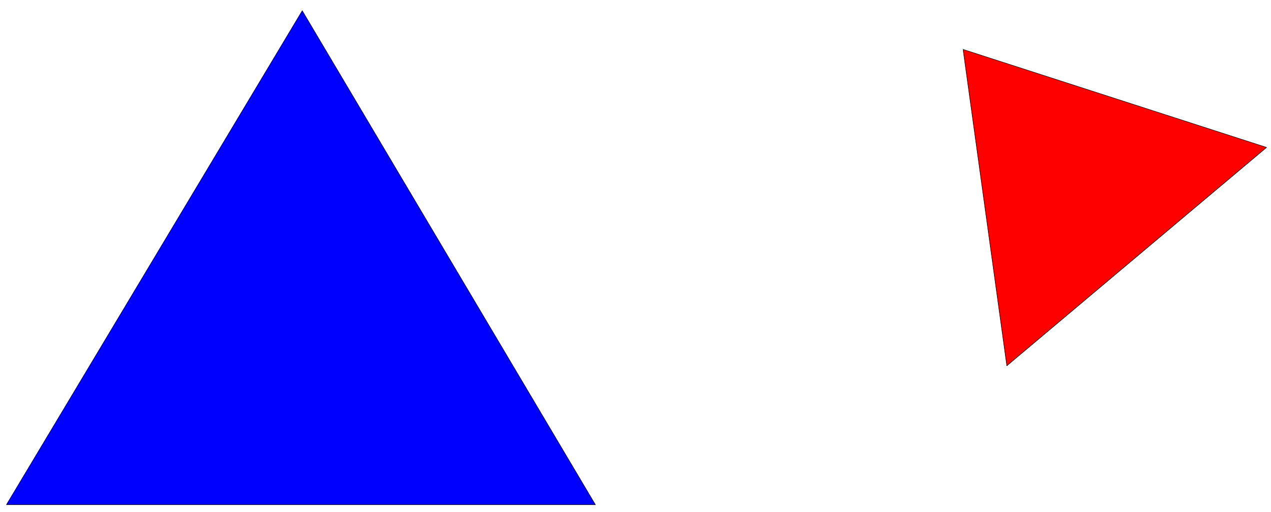
Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

wkrótce drugie wydanie, rozszerzone

Podobieństwo

- Dwie figury są **podobne**, jeżeli jedną można otrzymać z drugiej przez złożenie przesunięcia, ściskania i obrotu

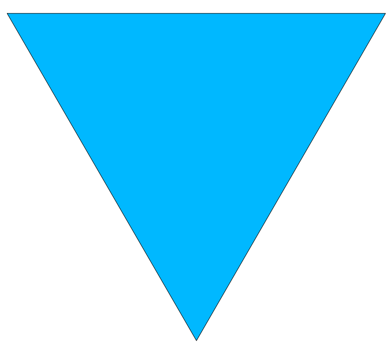


Samopodobieństwo

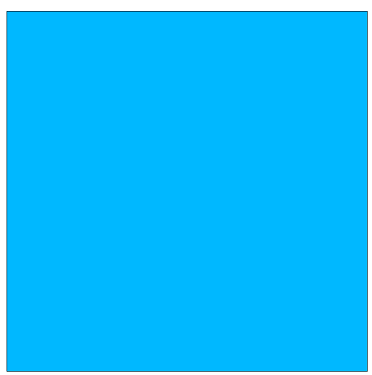
- Figura jest **samopodobna**, jeżeli można ją podzielić na części podobne do całości

- Przykłady:

Trójkąt



Kwadrat



Odcinek

Fraktale

Chmury nie są kulami,
góry nie są stożkami
wybrzeża nie są okręgami
i ani kora nie jest gładka,
ani błyskawica nie mknie po linii prostej

B. Mandelbrot

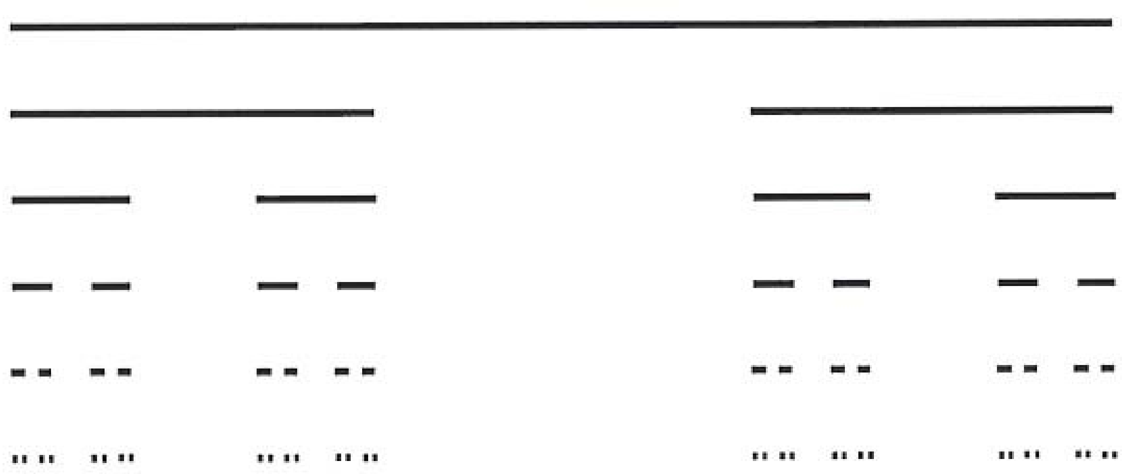
Fraktale

- **Fraktal**: zbiór samopodobny
o „niecałkowitym wymiarze”;
ma złożoną strukturę w każdej skali

- Przykłady fraktali to:
  - Zbiór Cantora
  - Krzywa Kocha
  - Trójkąt Sierpińskiego

Przykład: zbiór Cantora

- Wycinamy środkową jedną trzecią danego odcinka
- Stosujemy tą procedurę do każdej otrzymanej części
- Po (nieskończenie) wielu powtórzeniach otrzymamy **zbiór Cantora**

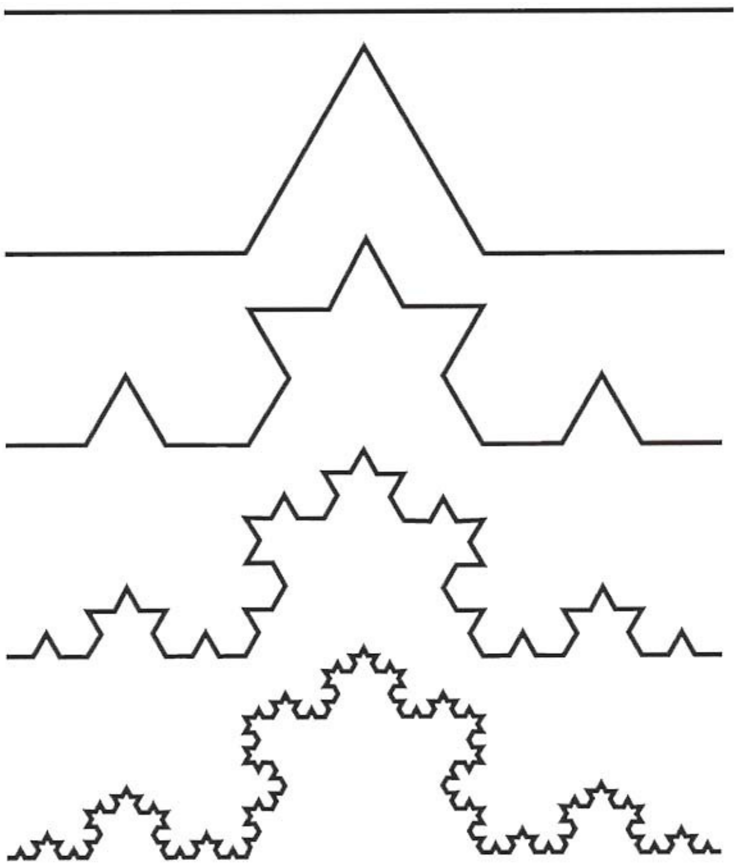


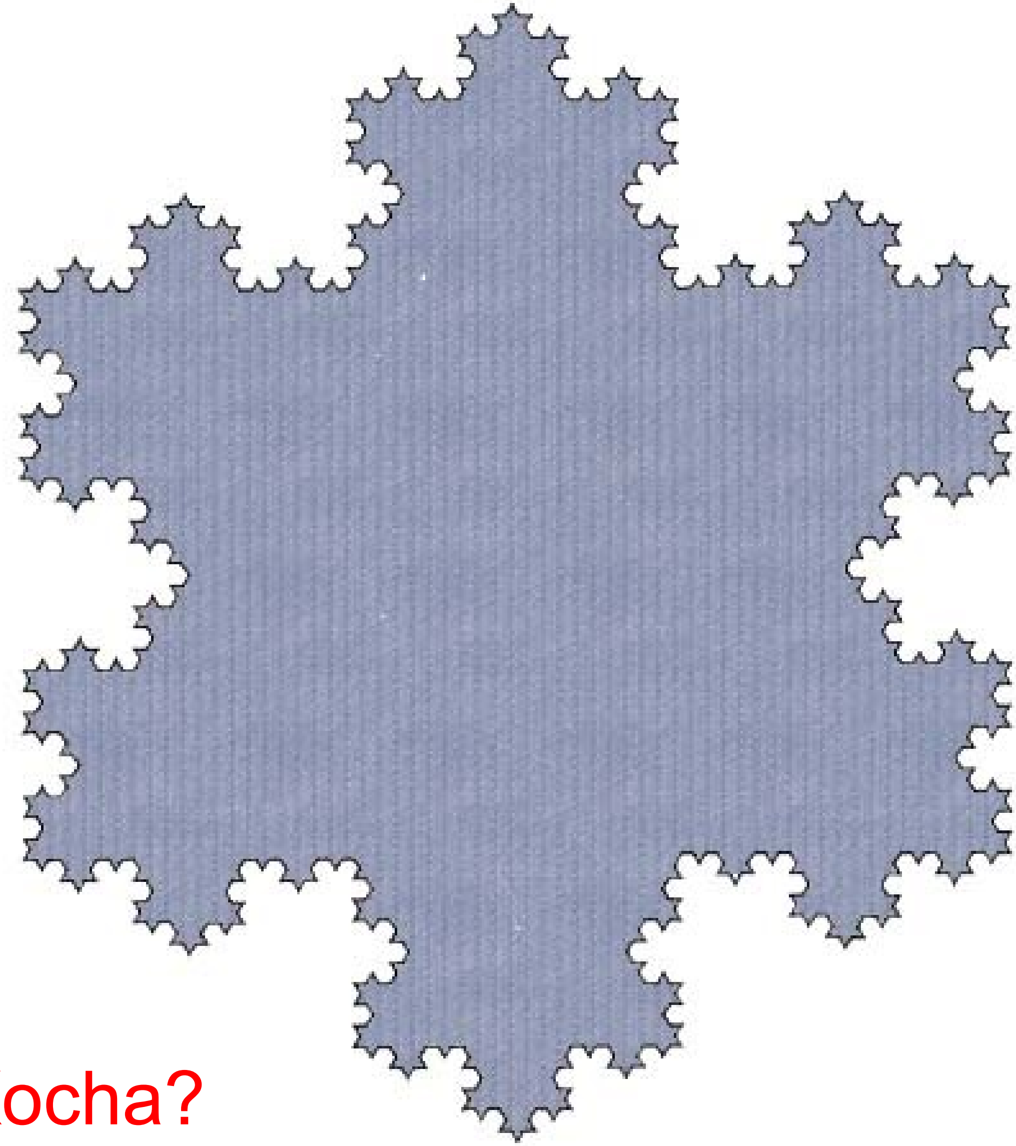
Własności zbioru Cantora

- Jak długi jest zbiór Cantora?
- Ile punktów ma zbiór Cantora?

Program **Cantor**

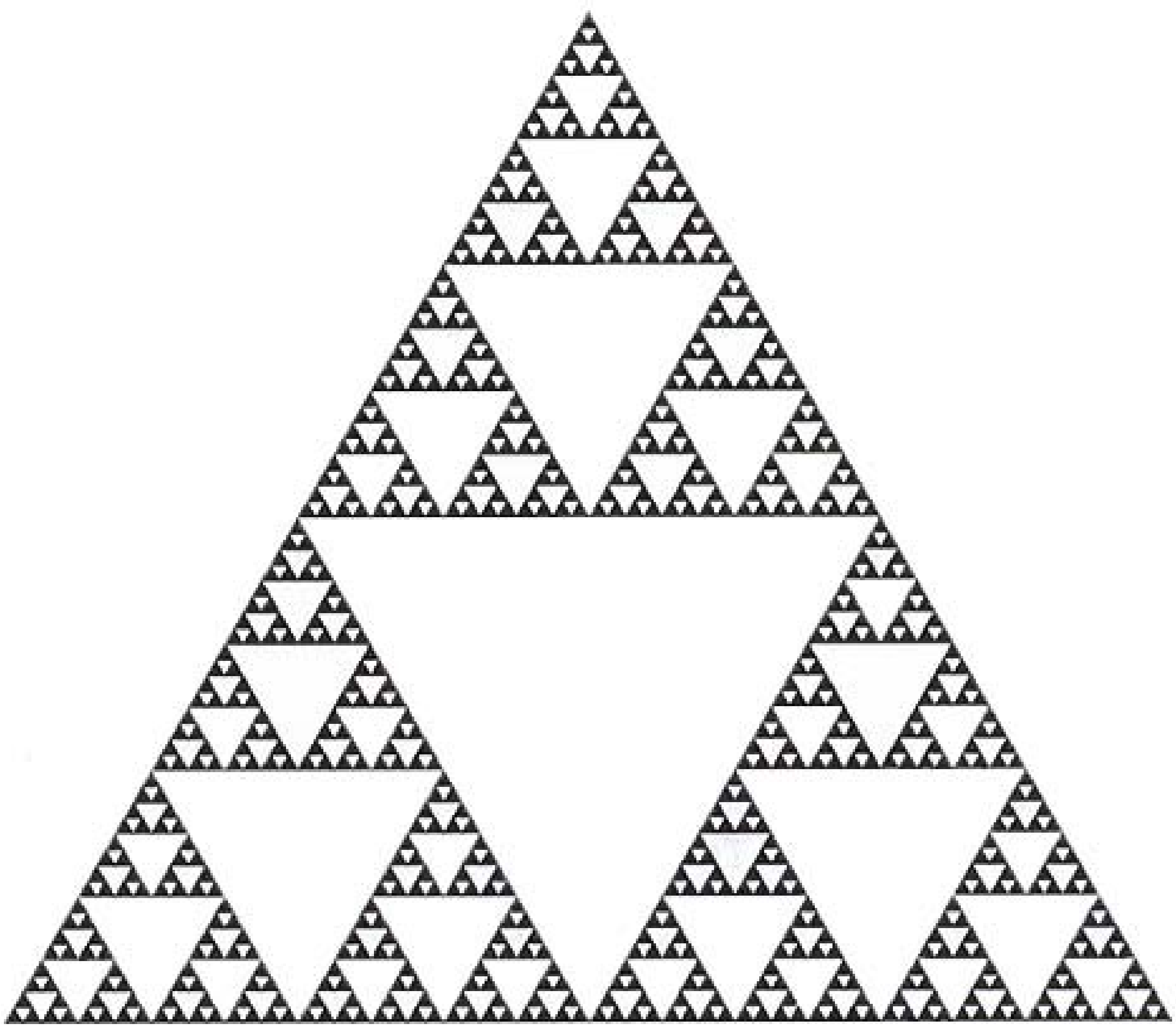
Przykład: krzywa i płatek Kocha





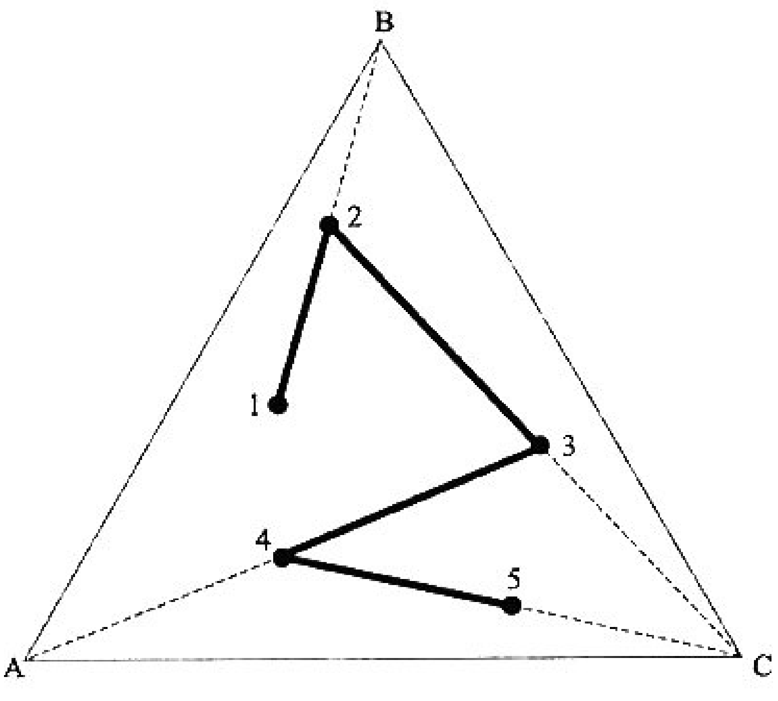
Jaka jest długość krzywej Kocha?
Jaka jest powierzchnia płatka Kocha?

Przykład: trójkąt Sierpińskiego



Konstrukcja trójkąta Sierpińskiego

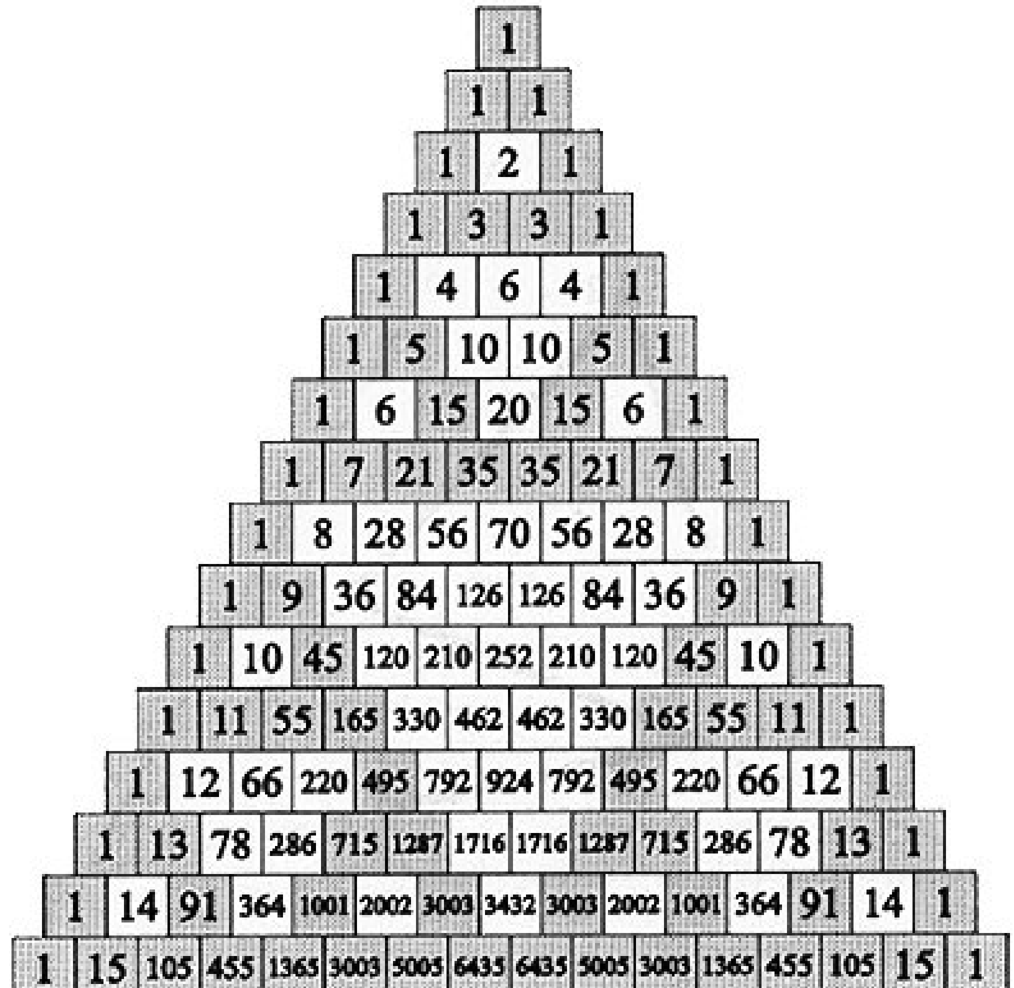
- Metoda 1: wycinamy coraz to mniejsze trójkąty ze zbioru początkowego
- Metoda 2: używamy dostępnej struktury w kroku N do konstrukcji kroku N+1 po czym skalujemy
- Metoda 3: Spacer losowy



Trójkąt Sierpińskiego w innym kontekście

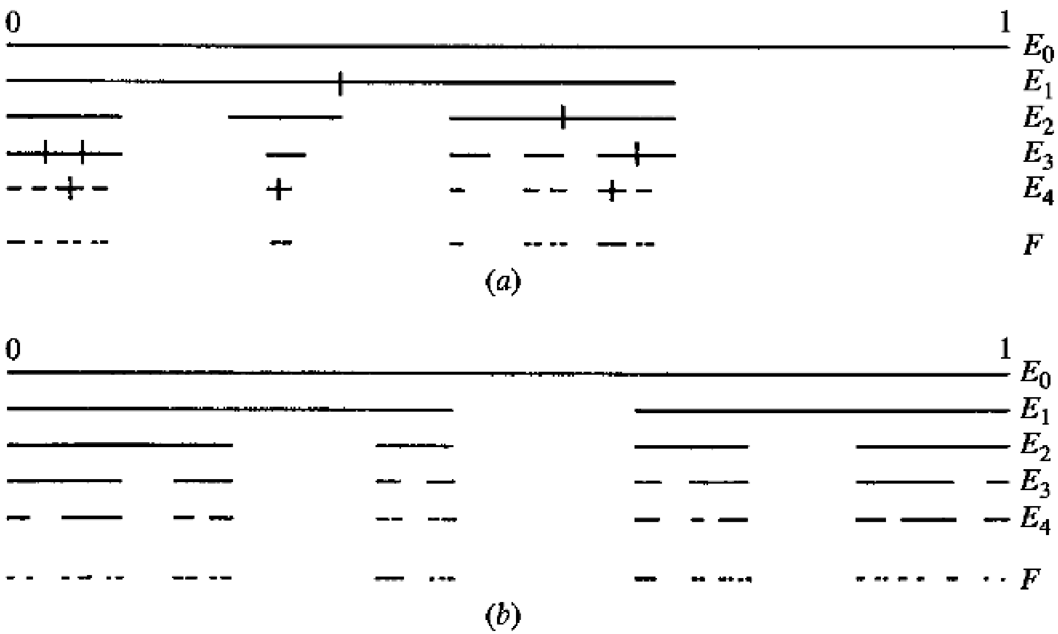
Nieparzyste liczby w trójkącie Pascala tworzą trójkąt Sierpińskiego...

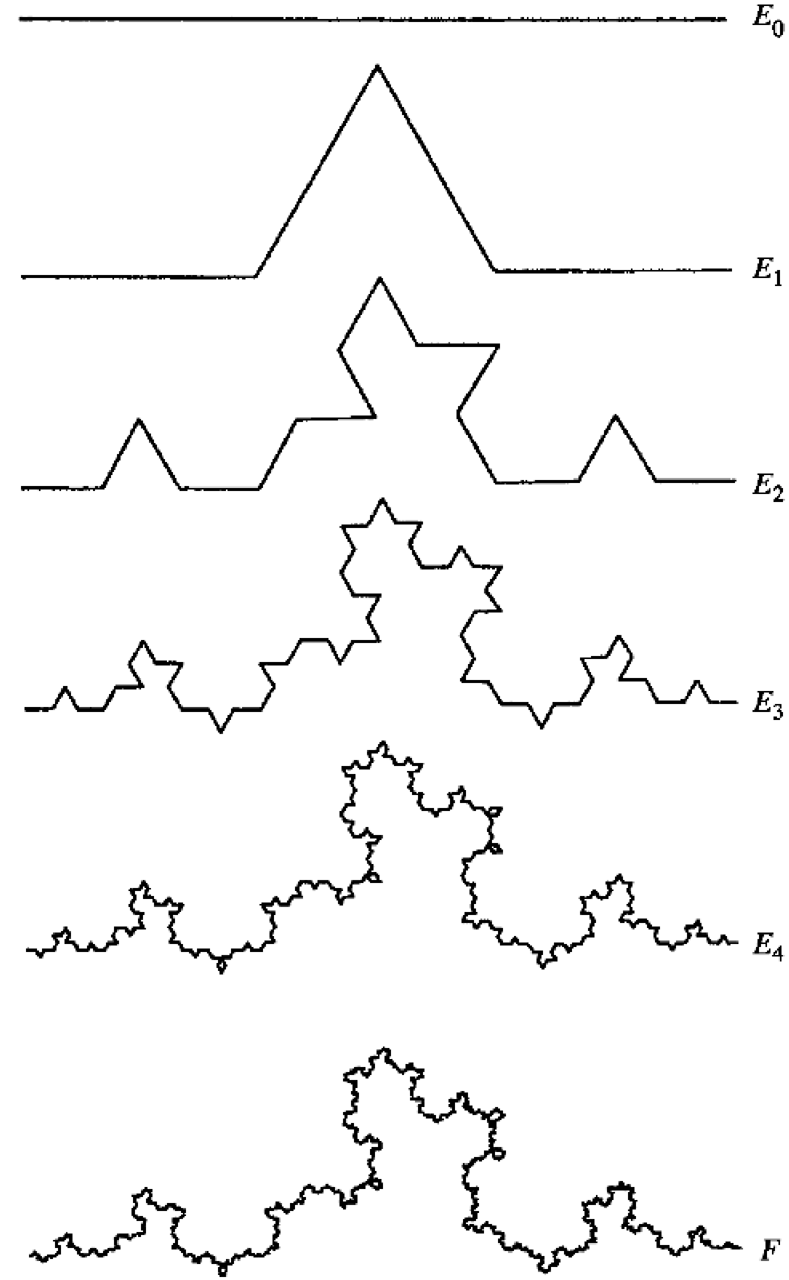
Stąd też bierze się automat komórkowy generujący ten fraktal



Fraktale losowe

- Losowe zbiory Cantora
- Losowe krzywe Kocha
- Większość fraktali spotykanych w przyrodzie





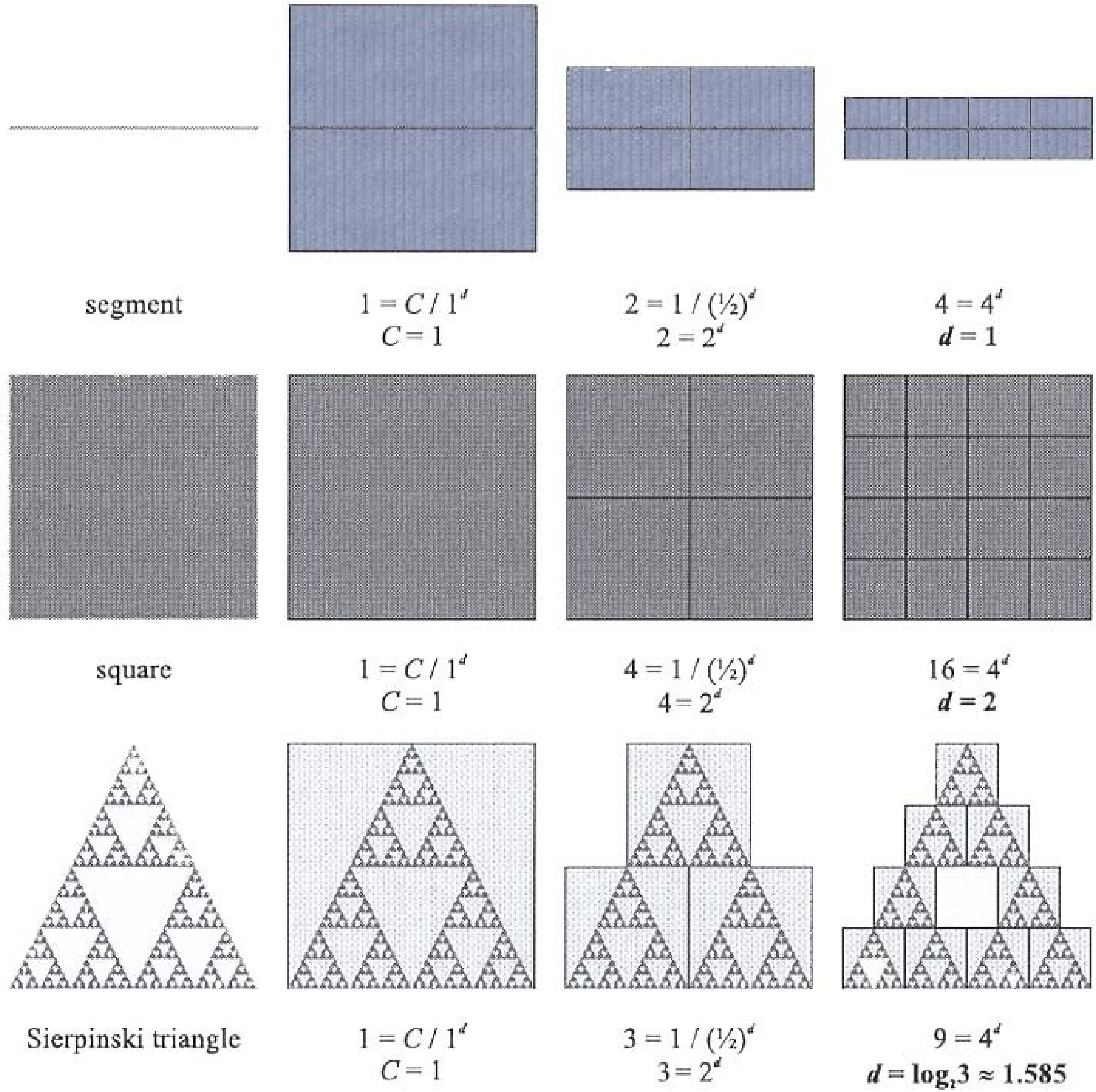
Wymiar fraktalny

- Pokrywamy badany zbiór “pudełkami” o boku 1/n. Ile takich pudełek trzeba, żeby zakryć cały zbiór?
- Wymiar fraktalny opisuje skalowanie masy układu przy zmianie skali długości
- Wymiar prostych zbiorów zero-, jedno- i dwuwymiarowych; Porównanie z fraktalami

$$N(1/n) \approx C\,n^{D}$$

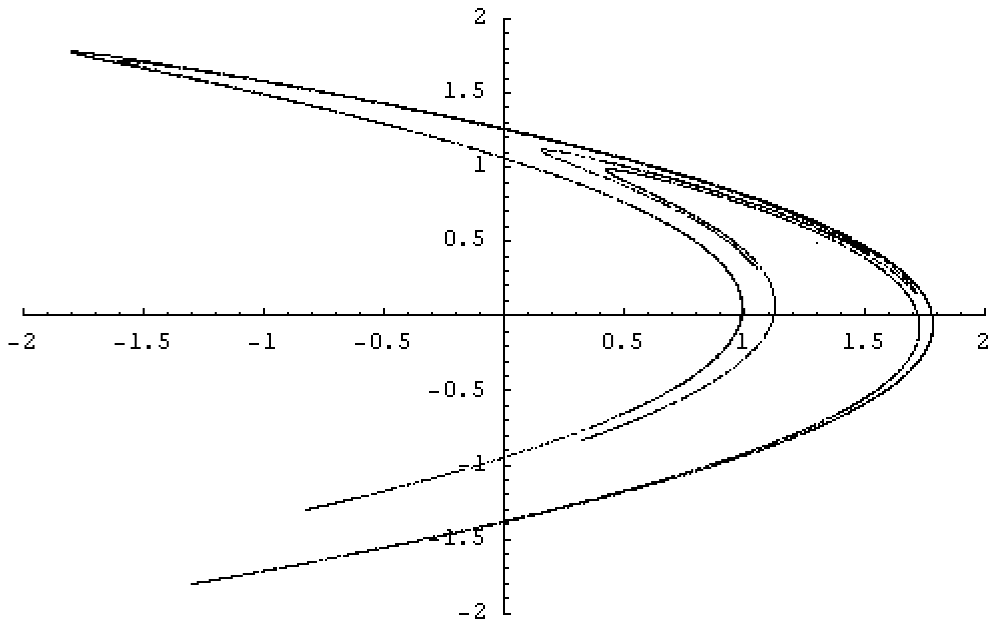
$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N(1/n)}{\ln n}$$

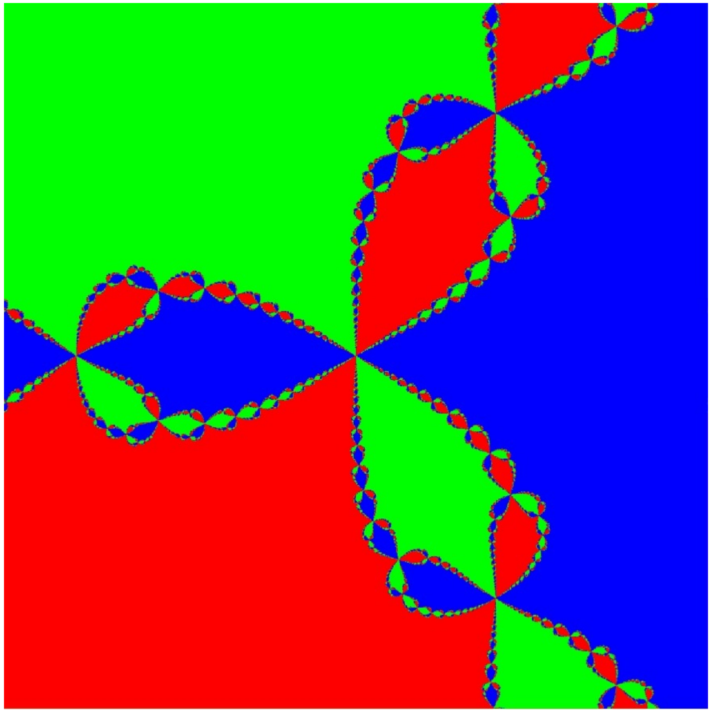
Wymiar fraktalny



Fraktale a układy dynamiczne

- Zbiory niezmiennicze (atraktory, np. atraktor Henona, atraktor Lorenza)
- Granice zbiorów przyciągania (np. brzegi basenów pierwiastków jedynki dla metody Newtona)





Konstrukcja zbioru Mandelbrota

- Rozważmy odwzorowanie

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + x_0$$
$$y_{n+1} = 2 x_n y_n + y_0$$

- Kolejne iteracje (punkty)
  - Albo rosną nieograniczenie („uciekają do nieskończoności”),
  - Albo nie wychodzą poza koło o środku w (0,0) i promieniu 2.
- Zbiór punktów drugiego typu to **żuk Mandelbrota**

Żuk Mandelbrota