MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik

Instytut Biologii Doświadczalnej PAN
Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej

d.wojcik@nencki.gov.pl
dwojcik@swps.edu.pl

tel. 022 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula

Deterministyczne czy losowe?

- Układ deterministyczny to taki, którego przyszły stan jest jednoznacznie określony przez stan obecny.

- Układ losowy to taki, który nie jest deterministyczny.

- UWAGA: jeżeli układ jest losowy, to nie znaczy, że nie rządzą nim żadne prawa, lub że nic nie potrafimy powiedzieć o jego przyszłym stanie!

Deterministyczne czy losowe?

- Gra w życie – przykład układu deterministycznego
- W bardziej złożonych modelach rzeczywistości nasza wiedza o badanym układzie jest często niepełna.
- Musimy korzystać wtedy z teorii prawdopodobieństwa

Deterministyczne czy losowe?

- Starożytni Grecy oddzielali zjawiska, które podlegały prawom Natury od zjawisk przypadkowych.
- Dzisiaj wiemy, że zjawiska przypadkowe często mają deterministyczne przyczyny.
- W praktyce nie ma to jednak znaczenia, bo nie możemy zgromadzić potrzebnej informacji, ani jej przetworzyć

Przykład: gaz w naczyniu

- Gaz składa się z cząsteczek, których prawa ruchu znamy dobrze.
- Znając położenie i prędkość danej cząsteczki można dobrze przewidzieć jej przyszłą trajektorię.
- Niestety, nie jesteśmy w stanie zmierzyć położeń i prędkości wszystkich cząstek gazu, których w szklance jest około 10^{22}.
- Nie jesteśmy też w stanie przechować takich informacji, a tym bardziej jej przetwarzać.

Dygresja: 10^{22} – ile to jest?

- 10^n to 1 i *n* zer
- Na przykład:
  10^5 = 100 000 – sto tysięcy
  10^{10} = 10 000 000 000 – 10 miliardów
- 10^{22} = 10 000 000 000 000 000 000 000
  – dziesięć tryliardów
- Mniej więcej tyle cząsteczek znajduje się w szklance gazu w warunkach normalnych

Rada na złożone układy

- Ponieważ cząsteczki
  - mają takie same własności,
  - jest ich bardzo dużo,
  - są mniej więcej równomiernie rozłożone w naczyniu,
  - poruszają się mniej więcej tak samo we wszystkich kierunkach
- możemy wykorzystać teorię prawdopodobieństwa, by opisać ich średnie zachowanie

Mechanika kwantowa

- Są też obiektywne powody probabilistycznego opisu świata
- Opisując własności mikrocząstek (elektronów, fotonów, atomów, cząsteczek) przyjmujemy dzisiaj, że ich zachowaniem rządzą prawa w swej istocie probabilistyczne
- Prawa rządzące ciałami makroskopowymi stają się deterministyczne dlatego, że dotyczą wielkości uśrednionych po wielu cząstkach.

Rzut monetą

Załóżmy, że moneta jest symetryczna.

Wtedy prawdopodobieństwo wyrzucenia orła p_o i reszki p_r jest takie samo.

Przyjęto umowę, że suma prawdopodobieństw wynosi 1. Zatem

$$p_o = p_r = 1/2$$

Co to jest prawdopodobieństwo

Prawdopodobieństwo:

liczba z przedziału od 0 do 1,
przyporządkowana
zdarzeniu przypadkowemu.

Liczba ta jest miarą szansy na to,
że dane zdarzenie zajdzie.

Jak ustalić prawdopodobieństwo?

- na podstawie rozważań o symetrii
- na podstawie doświadczeń

Symetryczne rozkłady prawdopodobieństwa

- rzut monetą
- rzut kostką
- wyciągnięcie karty z potasowanej talii
- wybór kolejnej cyfry w typowej liczbie rzeczywistej

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

Wybierzmy dowolną liczbę rzeczywistą.

Co można powiedzieć o rozkładzie cyfr
w zapisie dziesiętnym (dwójkowym, innym)
tej liczby?

Przykład: liczby wymierne są okresowe

$1/5 = 0.2_{10} = 0.001100110011\ldots_{2}$

$1/7 = 0.142857142857\ldots_{10} = 0.001001\ldots_{2}$

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

- **Przykład**: liczby niewymierne
  - 0.12112111211112111112111111 2...
  - e = 2,71828182845904523536028747135 27...
  - π = 3,14159265358979323846264338327 95...
  - $\sqrt{2}$ = 1,41421356237309504880168872420 97...
- prawdopodobieństwa wystąpienia cyfr
- prawdopodobieństwa wystąpienia par cyfr
- Program **Poe** i rozwinięcia liczb

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

- Dla miliona cyfr w rozwinięciu dziesiętnym
  - każda cyfra powinna występować ok. 100 000 razy (10 cyfr)
  - każda para cyfr powinna występować ok. 10 000 razy (100 par)
- Widzimy, że odstępstwa od średniej dla cyfr są rzędu ok. 0,5%, dla par cyfr – 2%
- Taką samą własność równomiernych rozkładów mają rozwinięcia w innych układach liczbowych

Statystyczne własności liczb rzeczywistych

- **Przykład**: Binarna reprezentacja liczby

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338 3...$$

jest początkowo zdominowana przez zera:
125 zer w pierwszych 204 znakach!

To daje odchylenie prawie 23%
od wartości średniej.

Dopiero po 26 596 znakach
liczby zer i jedynek zrównują się!

- **Fluktuacje!**

Weryfikacja doświadczalna teorii

- Teoretyczną wartość prawdopodobieństwa uzyskaną na podstawie rozważań o symetrii układu możemy weryfikować doświadczalnie

- Doświadczenia Buffona (XVIII w.)
  - 4040 rzutów
  - 2048 razy reszka, 1992 orzełek
  - $p_r = 0.5069$

- Doświadczenia Romanowskiego (XX w.)
  - 80640 rzutów
  - $p_r = 0.4923$

- Program **Buffon** – testy teorii na komputerze

Doświadczalne ustalenie prawdopodobieństwa

Definicja częstotliwościowa Richarda von Misesa:

Prawdopodobieństwo p_A zajścia zdarzenia A określamy jako granicę

$$p_A = lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

N_A – liczba zdarzeń A podczas przeprowadzenia N prób

Definicja prawdopodobieństwa von Misesa

- Formalnie: nie da się zastosować
- W praktyce: podstawa statystyki

Chłopcy i dziewczęta

- W badaniach demograficznych stwierdzono, że stosunek liczby urodzeń chłopców do wszystkich urodzeń jest liczbą stałą i wynosi około $22/43 \approx 0{,}5116$
- Kiedy Laplace odkrył, że w Paryżu w latach 1745-1784 liczba ta spadła do $25/49 \approx 0{,}5102$ uznał, że coś nadzwyczajnego musiało się wydarzyć.
- Okazało się, że ubodzy mieszkańcy okolic Paryża chętniej podrzucali do stolicy dziewczęta niż chłopców

Definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

- Prawdopodobieństwo P(A) jest równe stosunkowi liczby przypadków sprzyjających wystąpieniu zdarzenia A do wszystkich możliwych przypadków

- Jak na podstawie genetyki otrzymać stosunek liczby urodzeń chłopców do liczby wszystkich urodzeń?

- Ogólny problem: jak wyznaczyć **rozkład prawdopodobieństwa** opisujący dane zjawisko?

Rzut dwoma kostkami

- Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby oczek?

- Rozwiązanie A: na jednej kostce są 3 parzyste i 3 nieparzyste liczby. Suma jest parzysta gdy obie parzyste lub nieparzyste.
  1/2

- Rozwiązanie B: Możliwe sumy to 2, 3, ..., 12. 11 sum, 6 parzystych.
  6/11

- Które rozwiązanie jest poprawne?

Nieskończona liczba przypadków

- Problem z definicją Laplace'a

- Jakie jest prawdopodobieństwo zastania na stacji stojącego pociągu, jeżeli wiemy, że pociągi wjeżdżają na stację co 10 minut i stoją na niej minutę?

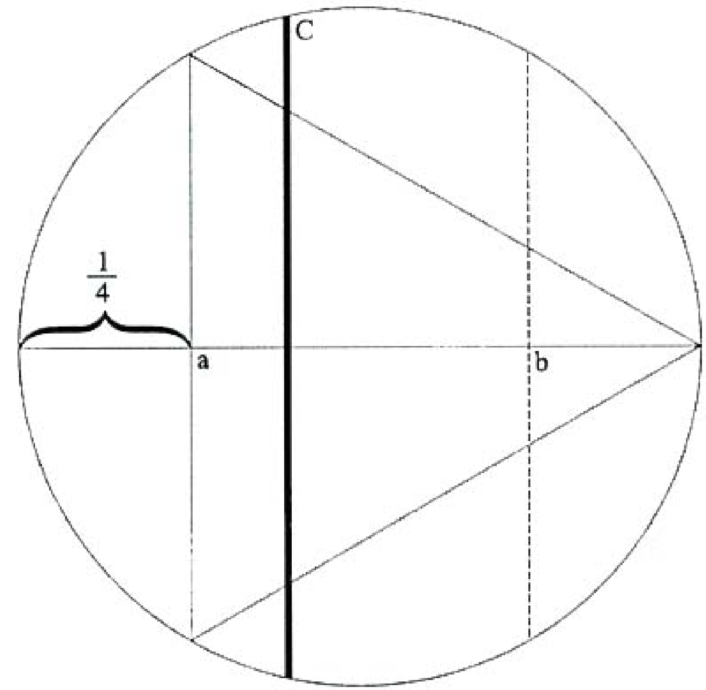
- Paradoks Bertranda:

  jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na chybił trafił wybrana cięciwa koła będzie dłuższa od ramienia trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?

- Program **Bertrand**

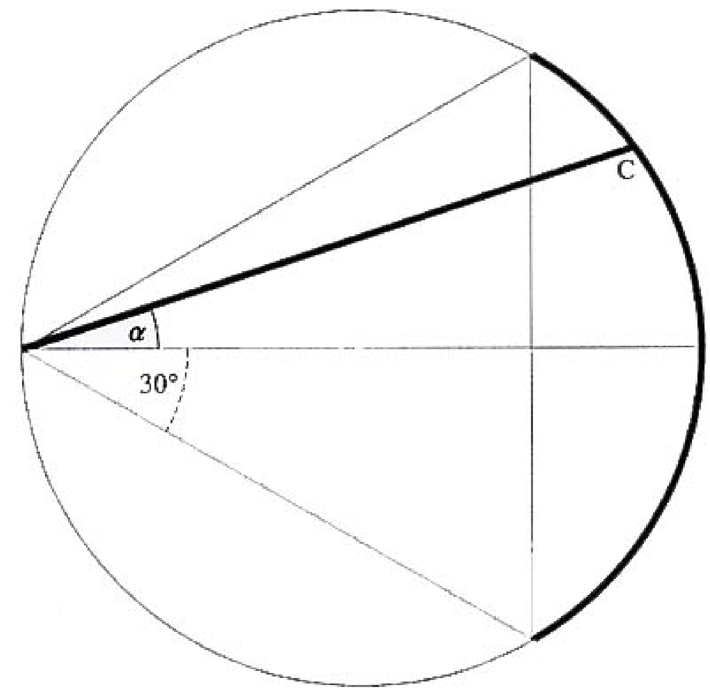
Paradoks Bertranda – rozwiązanie 1

Ustalmy kierunek cięciwy, np. pionowy. Przesuwając cięciwę od lewa do prawa widzimy, że tylko pomiędzy punktami *a* i *b* długość cięciwy jest większa od połowy średnicy. Długość *ab* jest równa połowie średnicy, zatem prawdopodobieństwo jest 1/2.



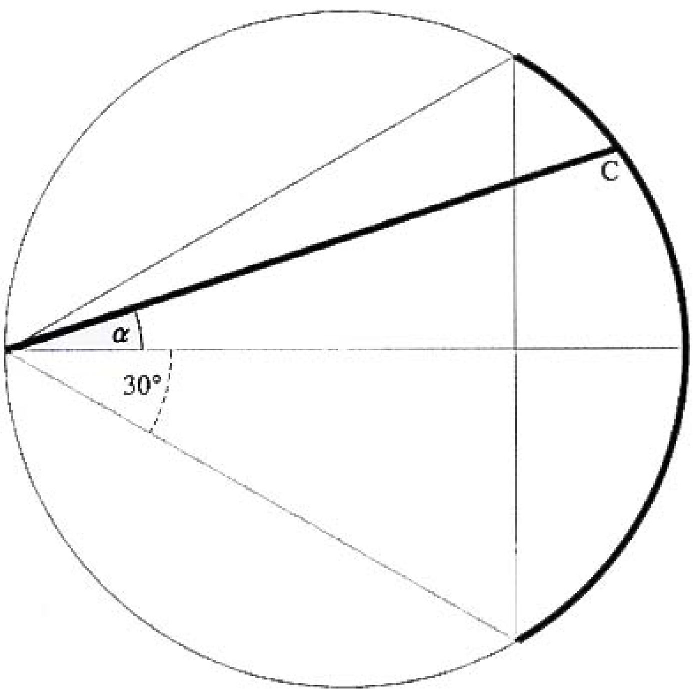
Paradoks Bertranda – rozwiązanie 2

Rozważmy cięciwę zaczepioną w jednym punkcie. Zmieniając jej kąt nachylenia względem średnicy od -90 do +90 stopni dostajemy wszystkie możliwe cięciwy. Te z nich, które ze średnicą tworzą kąt od -30 do +30 stopni są dłuższe od połowy średnicy. Zatem szukane prawdopodobieństwo wynosi 60/180 = 1/3.



Paradoks Bertranda – rozwiązanie 3

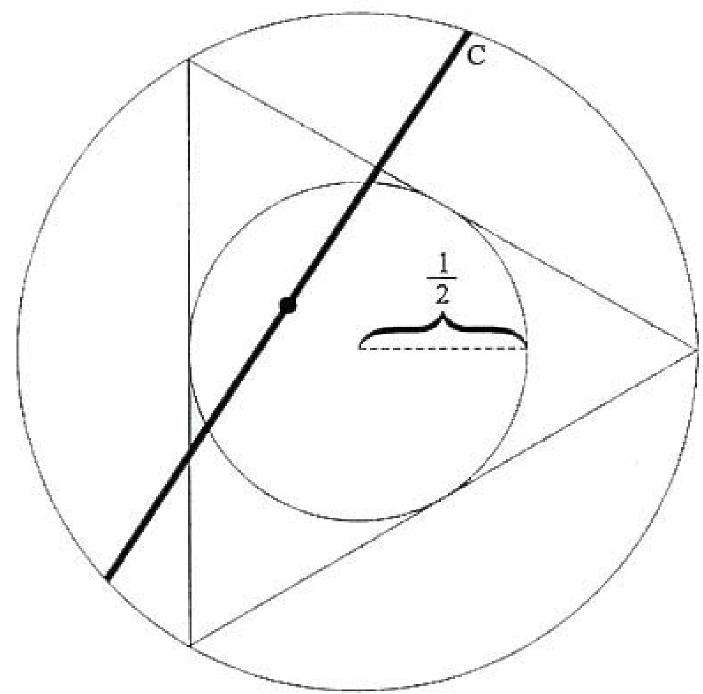
Wybierzmy losowo
dwa punkty na okręgu
łącząc je cięciwą.
Pierwszy punkt jest dowolny,
drugi musi leżeć
na jednej trzeciej okręgu
naprzeciwko pierwszego punktu,
żeby cięciwa była
odpowiednio długa.



Zatem prawdopodobieństwo
wynosi również 1/3.

Paradoks Bertranda – rozwiązanie 4

Środek każdej cięciwy leży wewnątrz koła i wyznacza jednoznacznie jej położenie.



Ta część koła, w której leżą środki cięciw spełniających zadany warunek, jest również kołem o promieniu równym połowie długości promienia dużego koła.

Stosunek pola tej części, do pola całego koła wynosi 1/4.

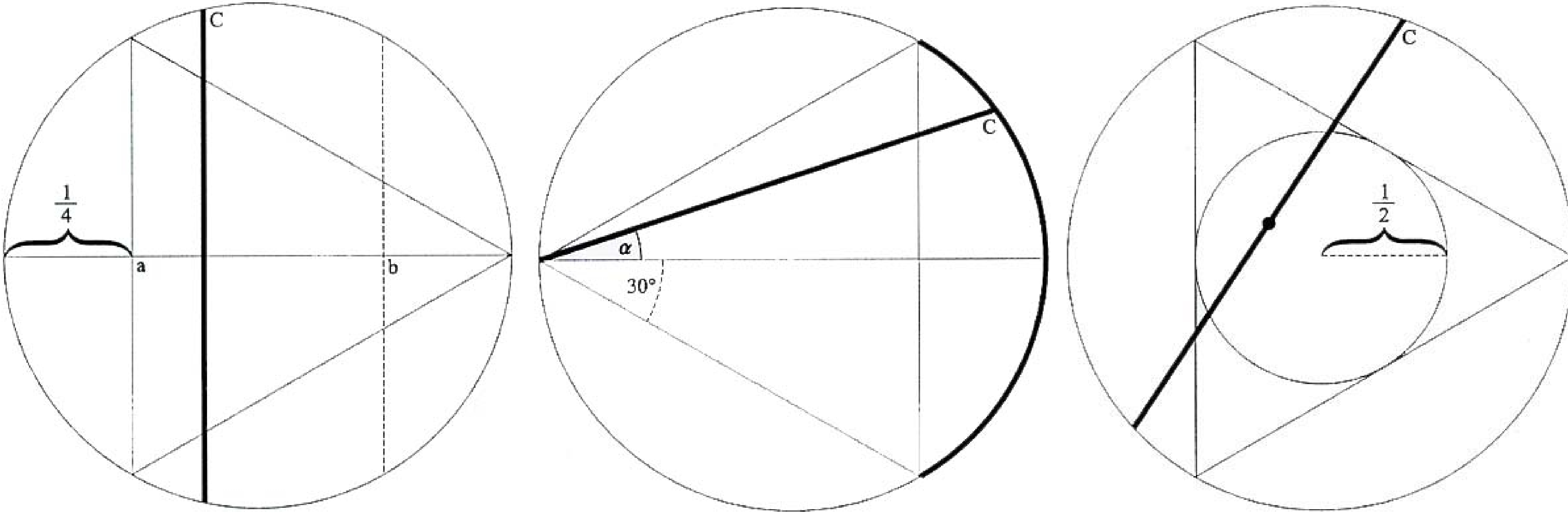
Paradoks Bertranda – rozwiązanie 5

Wybierzmy dwa punkty należące do koła.
Wyznaczają dokładnie jedną cięciwę.

Szukane prawdopodobieństwo wynosi tutaj

$$1/3+3\sqrt{3}/4\pi \approx 0{,}74683 \text{ !}$$

Paradoks Bertranda – podsumowanie



Które rozwiązanie jest poprawne?

Metoda Monte Carlo

- Metoda Monte Carlo polega na wykonaniu wielu eksperymentów losowych w celu oszacowania wyniku obliczeń.
- Wymyślił ją Stanisław Ulam, który dochodząc do zdrowia po ciężkiej chorobie stawiał pasjanse.
- Próbując oszacować szanse tego, że pasjans wyjdzie, stwierdził, że prościej jest postawić go wiele razy i oszacować prawdopodobieństwo z doświadczenia, niż je wyliczyć

Metoda Monte Carlo

- Typowe zastosowania:
  - wyliczanie pola powierzchni pod krzywą,
  - objętości ograniczonej powierzchnią,
  - itd.

- Program **Ulam:**

  pole prostokąta: funkcja stała
  pole trójkąta: x
  pole koła i liczba π: $\sqrt{(1-x^2)}$