MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

Dylemat więźnia (A. Tucker, 1950)

Siedzisz w więzieniu oskarżony o zbrodnię popełnioną wspólnie z drugim więźniem. Prokurator proponuje wam układ: Jeżeli obaj nie przyznacie się do winy, dostaniecie po roku; jeżeli obaj się przyznacie, dostaniecie po 10 lat. Jeżeli jeden się przyzna, a drugi nie, to ten pierwszy w nagrodę wyjdzie na wolność, a drugi skazany zostanie na 20 lat. Nie masz możliwości kontaktu z kompanem, do tego nie macie do siebie zaufania.

Co zrobić?

Analiza strategii

- Macierz gry, inaczej macierz wypłat, zawiera wyniki gry w zależności od strategii przyjętych przez graczy.

Więzień II

Więzień I	P	Z
P	(10, 10)	(0, 20)
Z	(20, 0)	(1, 1)

Teoria gier (J. Von Neumann, 1928)

- Teoria gier dostarcza modeli matematycznych do podejmowania decyzji w sytuacjach konfliktowych
- Konflikt może oznaczać konflikt interesów stron, np. w socjologii lub ekonomii, ale także konflikt wojenny
- Jej celem jest znajdowanie optymalnych strategii w sytuacji konfliktowej

Gra i strategia

- Grą nazywamy taką procedurę, której uczestnicy mają możliwość podejmowania decyzji (dokonywania wyboru)
- Ciąg wszystkich wyborów podjętych w trakcie gry od jej początku do samego końca nazywamy strategią.

Przykłady strategii

- W dylemacie więźnia każdy gracz (więzień) ma dwie strategie
- W grze w kółko i krzyżyk na planszy 3 na 3 mamy już prawie 9*7*5*3=945 strategii
- W grze w szachy tych strategii jest bardzo dużo: jeżeli w „typowej" partii gracz wykonuje ok. 30 ruchów i za każdym razem ma średnio 10 wyborów, to daje 10^{30} różnych strategii. Nawet jeżeli większość z nich jest na pierwszy rzut oka nierozsądna, i tak zostaje ogromna liczba strategii do przeanalizowania.

Analiza strategii

- Macierz gry, inaczej macierz wypłat, zawiera wyniki gry w zależności od strategii przyjętych przez graczy.

Więzień II

Więzień I	P	Z
P	(10, 10)	(0, 20)
Z	(20, 0)	(1, 1)

- Strategia dominująca;
tutaj: przyznanie się do winy

Iterowany dylemat więźnia

- Turnieje Axelroda
- Algorytmy genetyczne wybierające strategię
- Program **Axelrod**

Gry o sumie zerowej

- Gry dwuosobowe, w których suma wypłat w każdym polu macierzy wypłat wynosi 0.
- Większość dwuosobowych gier towarzyskich można przedstawić jako gry o sumie zerowej
- Von Neumann udowodnił, że wszystkie gry o sumie zerowej są rozwiązywalne, to znaczy dla każdej z nich istnieje optymalna strategia.

Przykład gry o sumie zerowej

- Teleturniej „Gwiazdy intelektu"
- Bierze udział Tata, Mama, Staś i Nel
- Kategorie: Kino, Piosenka, Sport, Telewizja
- W finale Rodzina wybiera jednego przedstawiciela, a prezenter jedną kategorię.
- Prezenter nie chce, żeby Rodzina wygrała nagrodę, Rodzina chce wygrać.
- Kogo rodzina powinna wystawić i jaką kategorię pytań powinien wybrać prezenter, żeby zmaksymalizować swoje szanse?

Ranking rodziny

R \ D	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	30	70	30
S	70	60	80	90	60
N	70	20	40	60	20
β_i	80	60	90	90	

Analiza sytuacji od strony Rodziny

- Wybieramy Tatę: jeżeli kategoria Kino, to szansa wygrania 30%
- Wybieramy Mamę: jeżeli kategoria Sport, to szansa wygrania 30%
- Wybieramy Stasia: jeżeli kategoria Piosenka, to szansa wygrania 60%
- Wybieramy Nel: jeżeli kategoria Piosenka, to szansa wygrania 20%

Wybieramy Stasia!

Analiza sytuacji od strony Prezentera

- Wybieram Kino: jeżeli wystawią Mamę, to mają 80% szans by wygrać
- Wybieram Piosenkę: jeżeli wystawią Stasia, to mają 60% szans by wygrać
- Wybieram Sport: jeżeli wystawią Tatę, to mają 90% szans by wygrać
- Wybieram Telewizję: jeżeli wystawią Stasia, to mają 90% szans by wygrać

Wybieram piosenkę!

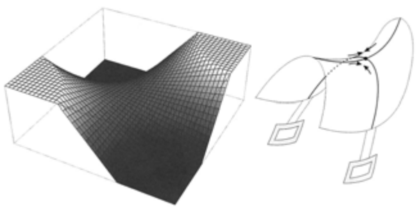
Analiza sytuacji

- Rodzina wybiera *największą* wartość α_i
- Prezenter wybiera *najmniejszą* wartość β_i
- Zasada minimaksu

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

- Wartości α i β noszą nazwę dolnej i górnej granicy gry

Punkt siodłowy



Jak grać kiedy granice gry są różne?

- Rozważmy inną tabelę gry:

R \ D	K	P	S	T	α_i
T	30	50	90	80	30
M	80	40	60	70	40
S	70	30	80	90	30
N	70	20	40	60	20
β_j	80	50	90	90	

- Tym razem dolna i górna granica gry są różne:

$\alpha=40\% < \beta=50\%$

Strategia mieszana

- Von Neumann udowodnił, że każda gra o sumie zerowej posiada rozwiązanie, ale optymalna jest na ogół strategia mieszana.
- Strategia mieszana oznacza losowy wybór strategii z pewnym prawdopodobieństwem p_i
- Rodzina wystawia kandydata z prawdopodobieństwem p_i (i=M,T,S,N), prezenter wybiera jedną z dyscyplin z prawdopodobieństwem q_j (j=K,P,S,T).

Strategia mieszana

- Średnia wygrana rodziny wynosi:

$$\langle \alpha_j \rangle = p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + p_3 a_{3j} + p_4 a_{4j}$$

- Średnia „przegrana” prezentera wynosi:

$$\langle \beta_i \rangle = q_1 a_{j1} + q_2 a_{j2} + q_3 a_{j3} + q_4 a_{j4}$$

- Idealnie byłoby, gdyby średnia wygrana rodziny nie zależała od decyzji prezentera.
- Von Neumann pokazał, że można tak wybrać p_i i q_j, że $\langle \alpha_j \rangle = \langle \alpha \rangle$, $\langle \beta_i \rangle = \langle \beta \rangle$, co więcej $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle = \nu$
Innymi słowy gra posiada rozwiązanie mieszane

Zredukowany przykład

- Wystarczy ograniczyć się do Taty i Mamy, Kina i Piosenki:

R \ S	K	P
T	30	50
M	80	40

A \ B	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

- Daje nam to układ równań do rozwiązania

$$\begin{gathered} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} = \nu, \quad q_1 a_{11} + q_2 a_{12} = \nu, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = \nu, \quad q_1 a_{21} + q_2 a_{22} = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1, \quad q_1 + q_2 = 1. \end{gathered}$$

- W wyniku dostajemy:

$$p_1 = 2/3, \quad p_2 = 1/3, \quad q_1 = 1/6, \quad q_2 = 5/6, \quad \nu = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}.$$

Inne typy gier

- Stan równowagi Nasha:

  taki układ strategii graczy, że żaden gracz nie może poprawić swojej sytuacji, jeżeli wszyscy pozostali utrzymają swoją strategię
- Każda gra skończona ma przynajmniej jeden stan równowagi Nasha

Ewolucja

- Długotrwałe poddawanie populacji mechanizmom ewolucji powoduje stopniowe udoskonalanie należących do niej osobników

Kilka pojęć

- Osobnik – jednostka posiadająca cechy odróżniające ją od innych zakodowane w genach
- Genotyp – ciąg symboli kodujący kompletny zestaw cech osobnika
- Fenotyp – zbiór cech osobnika odpowiadający danemu genotypowi
- Populacja – zbiór osobników (fenotypów) żyjących w pewnym środowisku, oddziałujących na siebie i rozmnażających się

Mechanizmy ewolucji

- Wariacja – mechanizm powodujący *zwiększenie* różnorodności populacji:
  - Mutacja – przypadkowa częściowa zmiana genotypu danego osobnika
  - Krzyżowanie (rekombinacja) – powstawanie nowego genotypu na skutek połączenia dwóch już istniejących w populacji genotypów
- Selekcja - mechanizm powodujący *zmniejszenie* różnorodności populacji:
  - Selekcja naturalna – wymieranie osobników gorzej przystosowanych do środowiska
  - Selekcja płciowa – lepiej przystosowane osobniki mają więcej potomstwa

Algorytmy genetyczne

- Algorytmy wykorzystujące ideę doboru naturalnego, procesy krzyżowania i mutacji.
- Rozwiązują problemy optymalizacyjne polegające na znalezieniu w danej populacji osobnika najlepszego pod jakimś względem.
- Do określania stopnia przystosowania osobnika służy funkcja celu, zwana też funkcją przystosowania.

Cechy algorytmów genetycznych

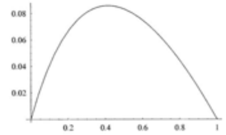
- Nie przetwarzają bezpośrednio parametrów zadania lecz ich zakodowaną postać
- Prowadzą poszukiwania rozpoczynając od pewnej populacji danych początkowych
- Korzystają tylko z funkcji celu
- Stosują probabilistyczne, a nie deterministyczne reguły wyboru

Przykład: maksymalizacja funkcji

- Rozważmy algorytm genetyczny szukający maksimum funkcji:

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{1+x}$$
$$x \in (0,1)$$

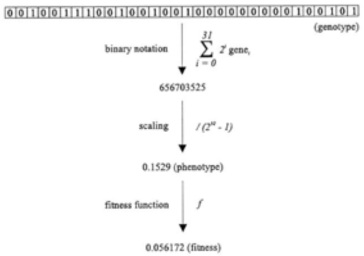
- Program **Holland**



Schemat algorytmu

- Fenotyp: każdy osobnik ma jedną cechę – liczbę z przedziału 0 do 1
- Genotyp: binarny kod liczby długości *n*, zatem od 0 do 2^n-*1*. Zamieniamy na liczbę 0 do 1 dzieląc przez 2^n.
- Dla każdego takiego osobnika możemy policzyć wartość *f*, czyli jego „przystosowanie"

Kodowanie fenotypu



Selekcja twarda

1. Zaczynamy od jednego osobnika z losowym genotypem
2. Mutujemy osobnika zmieniając każdy z 32 bitów genotypu z prawdop. 1/32
3. Liczymy funkcję przystosowania dla obu osobników i wyrzucamy gorszego
4. Wracamy do punktu 2.

Rozwiązanie analityczne

- Maksimum funkcji:

$$f(x)=1-\frac{x}{2}-\frac{1}{1+x}$$

- Jest tam, gdzie zeruje się jej pochodna:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{(1+x)^2}=0$$

- Zatem

$$x=\sqrt{2}-1$$

- To daje fenotyp: 0110101000001001111001 1001100111111100111011111001101

Selekcja miękka

- Przeszukiwanie wszystkich fenotypów jest powolne – 2^{32} możliwości
- Algorytm genetyczny może być znacznie szybszy, chyba że trafi w lokalne maksimum, np. 0,5=1000000000000000000000000...
- Selekcja miękka: w dużej populacji słabsze osobniki mogą przeżywać i rozmnażać się, lecz przeżywają lub rozmnażają się z mniejszym prawdopodobieństwem niż osobniki lepiej przystosowane

Inne zastosowania a. genetycznych

- Można je stosować także kiedy nie ma konkretnej funkcji przystosowania, np. w iterowanym dylemacie więźnia
- Program **Axelrod**

Modelowanie społeczeństwa

Użyte programy

- Axelrod
- Holland
- Pasteur
- Schelling

Źródła

- http://www.wiw.pl/modelowanie/