MODELOWANIE RZECZYWISTOŚCI

Daniel Wójcik
Instytut Biologii Doświadczalnej PAN

d.wojcik@nencki.gov.pl

tel. 5892 424

http://www.neuroinf.pl/Members/danek/swps/

Podręcznik

Iwo Białynicki-Birula
Iwona Białynicka-Birula

ISBN: 83-7255-103-0
Data wydania: 6 maja 2002

Układ dynamiczny

- *Układ*: zbiór obiektów, których zmiany w czasie chcemy badać
- *Dynamiczny*: zmieniający się w czasie zgodnie z pewną regułą

Typy układów dynamicznych

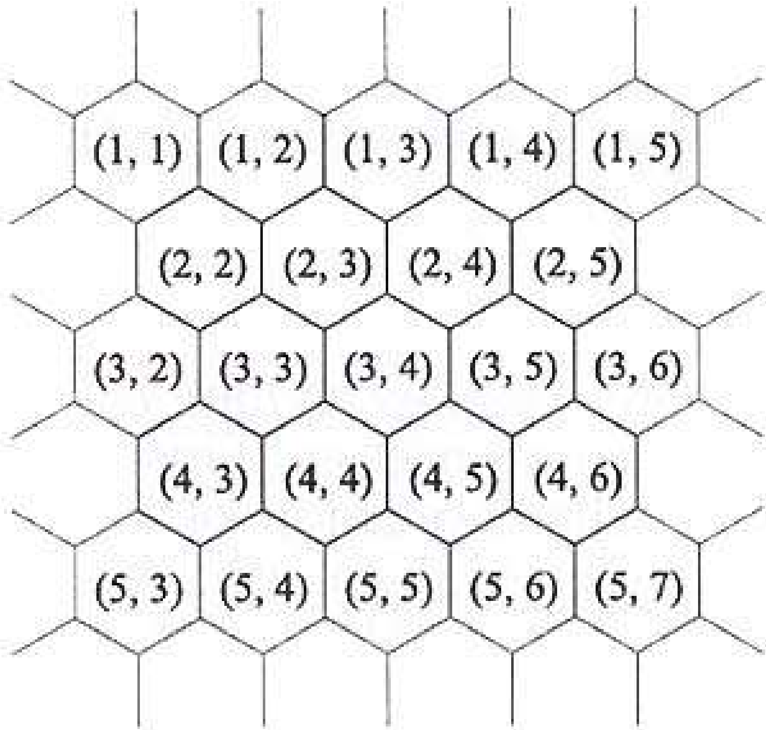
- Układy deterministyczne
  - Układy autonomiczne
  - Układy zależne od czasu
- Układy losowe (stochastyczne)

Przykład 1: Wyborcy

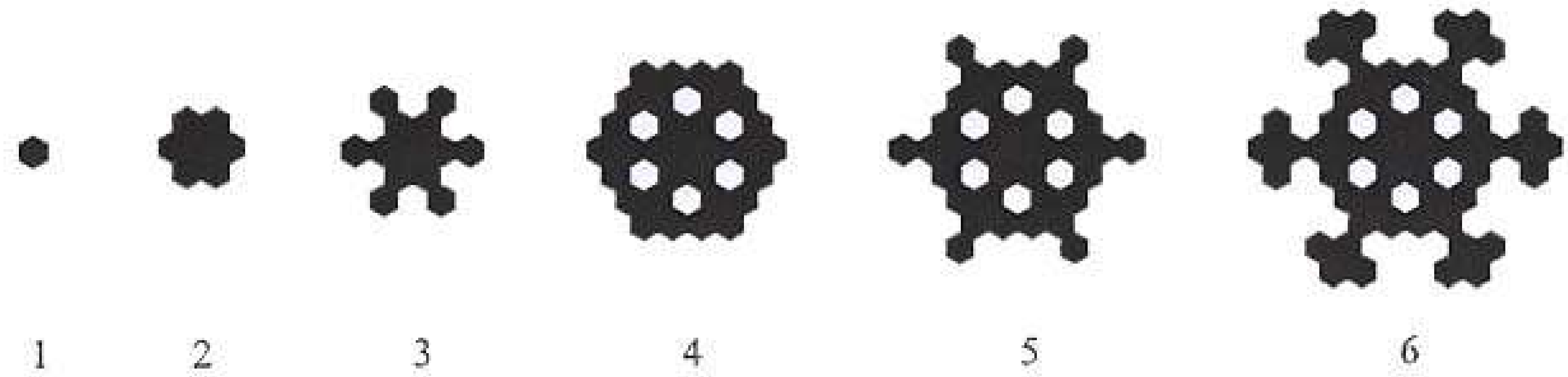
- *Stan układu*: Preferencje wyborcze grupy respondentów
- *Ewolucja*: Zmiany preferencji następują na skutek kontaktów międzyludzkich

Przykład 2: Płatek śniegu

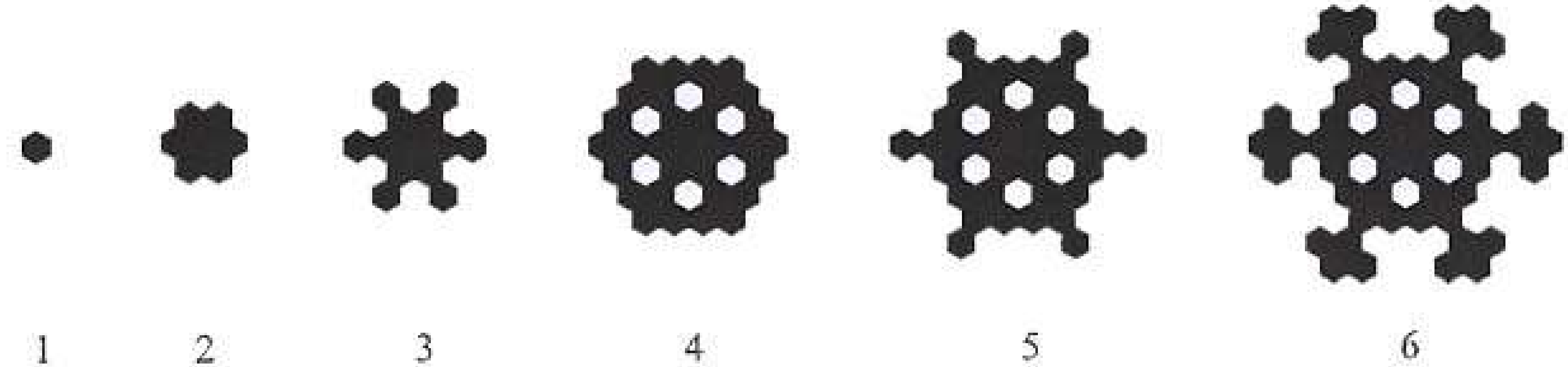
- Automat komórkowy na sieci o strukturze plastra miodu
- Ten sam stan początkowy zawsze daje ten sam stan końcowy (układ deterministyczny)

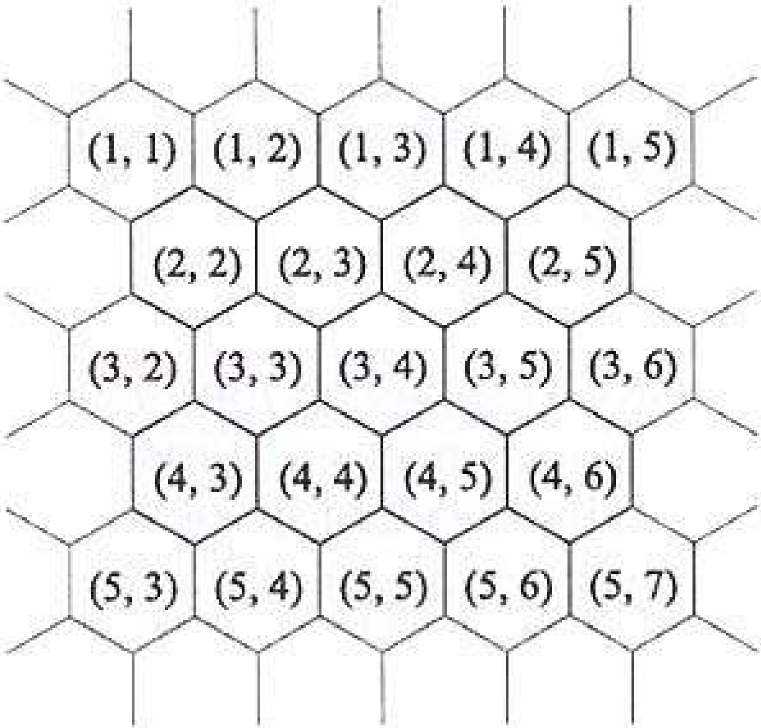


Płatek śniegu

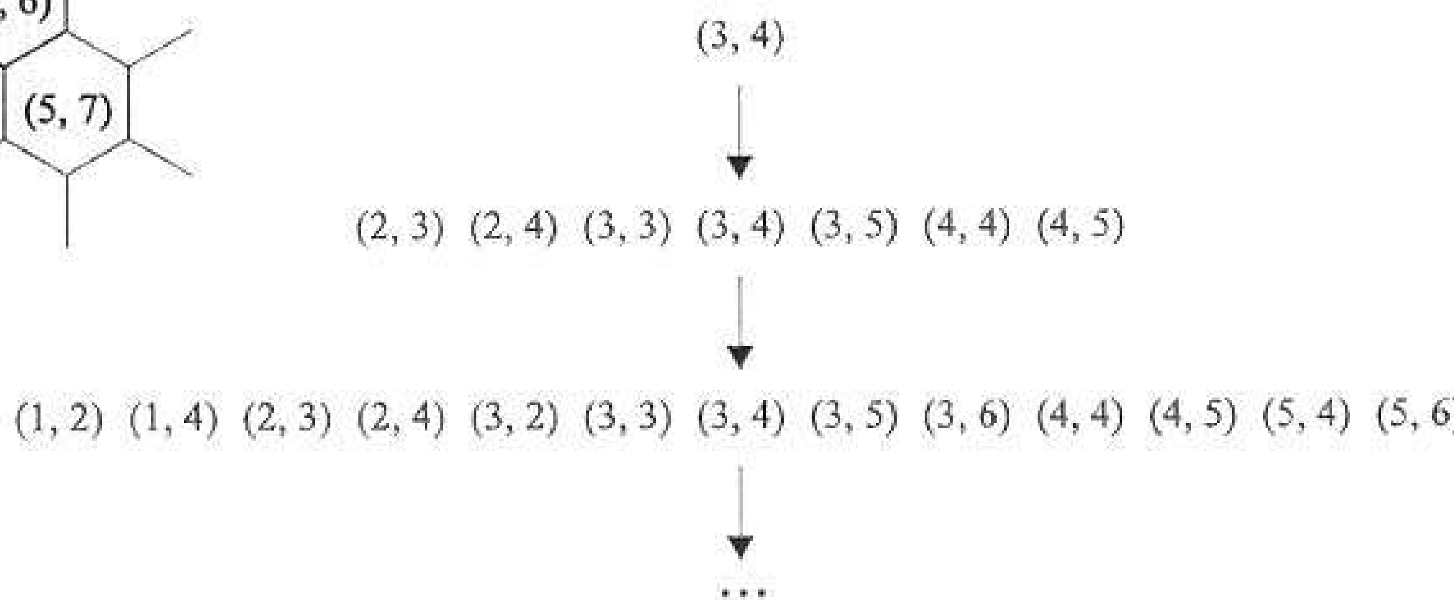


Reguła: Nowy fragment powstaje w komórce sieci, która ma dokładnie jednego zmarzniętego sąsiada





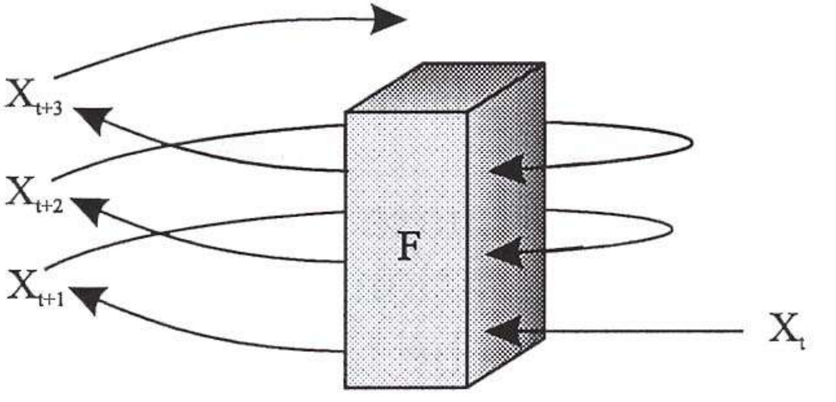
Płatek śniegu



Ewolucja układu dynamicznego

- Rozwój w czasie układu dynamicznego opisuje równanie ewolucji w postaci wzoru iteracyjnego

$$X_{n+1} = F_p(X_n)$$



- X_n i X_{n+1} opisują stan układu w chwili *n* i *n+1*
- F_p określa jakim zmianom ulega stan układu w kolejnych krokach iteracji

Przykład 3: algorytm Newtona

- Jak policzyć pierwiastek z a?
- Należy wybrać dowolną liczbę i iterować ją zgodnie z regułą

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

- Dlaczego?
  Jeżeli $x < \sqrt{a}$ to $\sqrt{a} * x < a$, a więc $\frac{a}{x} > \sqrt{a}$
  i na odwrót.

Przykład 3: pierwiastek z 2

- Weźmy x_0=2
- Wtedy
  - x_1=1,5
  - x_2=1,416
  - x_3=1,414215
  - X_4=1,414213562374
  - x_5=1,414213562373095048801689
  - ...
- I tak dalej

Kilka pojęć

- *Punkt stały*: stan układu, który się nie zmienia z czasem
- *Atraktor*: stan, do którego układ dąży z czasem
- *Dorzecze (basen) atraktora*: zbiór stanów początkowych, które dążą do danego atraktora

Przykład basenów atraktora

- Rozważmy odwzorowanie płaszczyzny

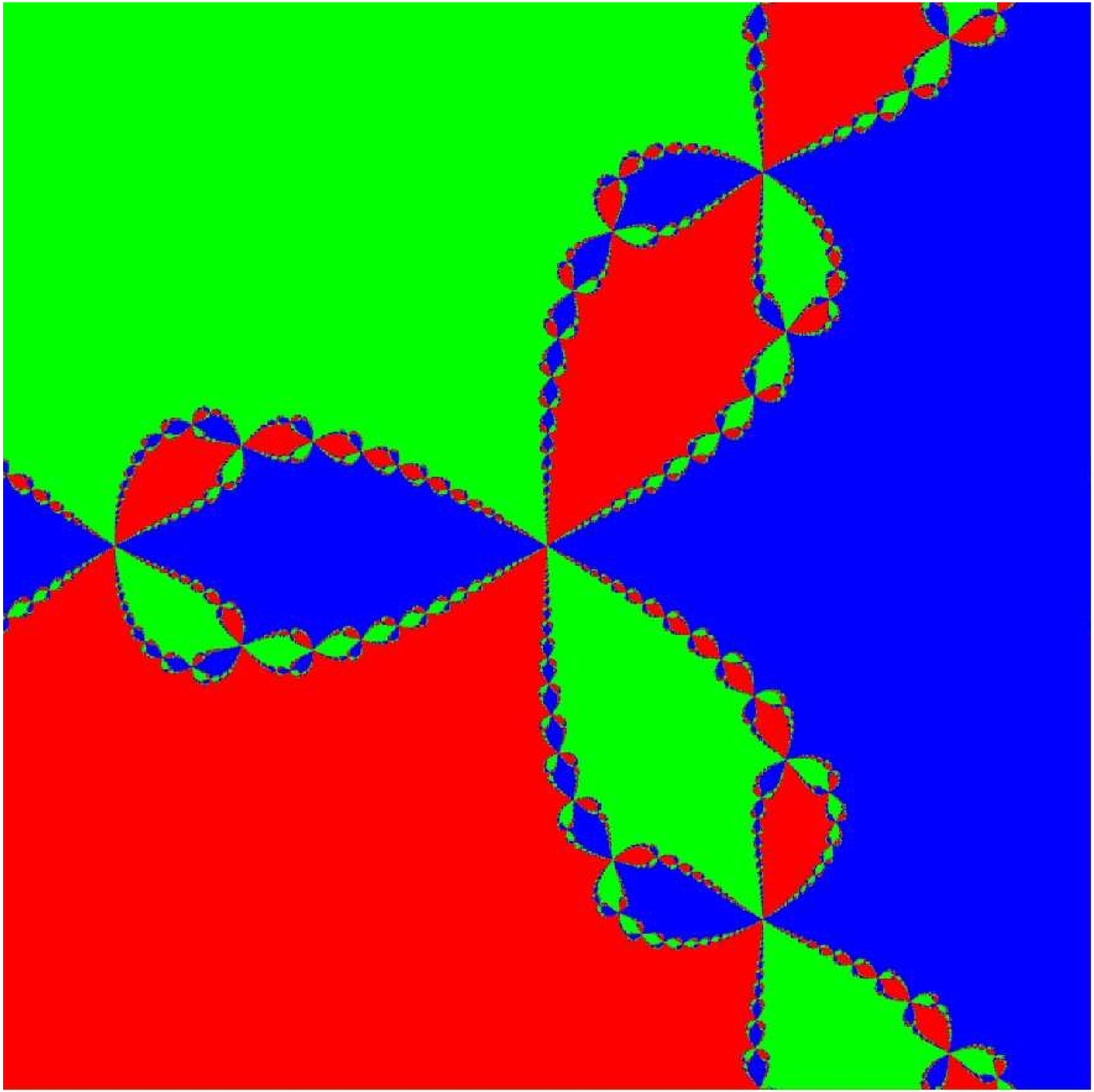
$$x_{t+1}=\frac{2}{3}x_t+\frac{1}{3}\frac{x_t^2-y_t^2}{\left(x_t^2+y_t^2\right)^2}$$

$$y_{t+1}=\frac{2}{3}y_t-\frac{1}{3}\frac{2\ x_t y_t}{\left(x_t^2+y_t^2\right)^2}$$

- To odwzorowanie ma trzy atraktory:

$$(1,0),\left(\frac{-1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

Baseny pierwiastków jedynki



Model Ehrenfesta: psy i pchły

- N pcheł siedzi na dwóch psach: na Azorze A_n, a na Burku B_n
- Co chwilę jedna z pcheł podejmuje decyzję o przeskoku z jednego psa na drugiego
- Jak zmienia się rozkład pcheł?
  $A_{n+1} = A_n - 1$ z prawdopodobieństwem A_n/N
  $A_{n+1} = A_n + 1$ z prawdopodobieństwem $(N-A_n)/N$

Determinizm a losowość

- Większość procesów w przyrodzie ma składowe deterministyczną i losową
- Jeżeli „szum” jest nieduży, modelujemy układ jako ściśle deterministyczny
- Jeżeli „szum” jest dominujący, modelujemy układ jako proces stochastyczny

W ogólności

- Jesteśmy bez szans...

Chaos deterministyczny

- Proste iteracje odwzorowań:
  - Funkcja liniowa
  - Funkcja logistyczna
- Układy z ciągłym czasem
- Wpływ topologii na ewolucję

Przykład: funkcja liniowa

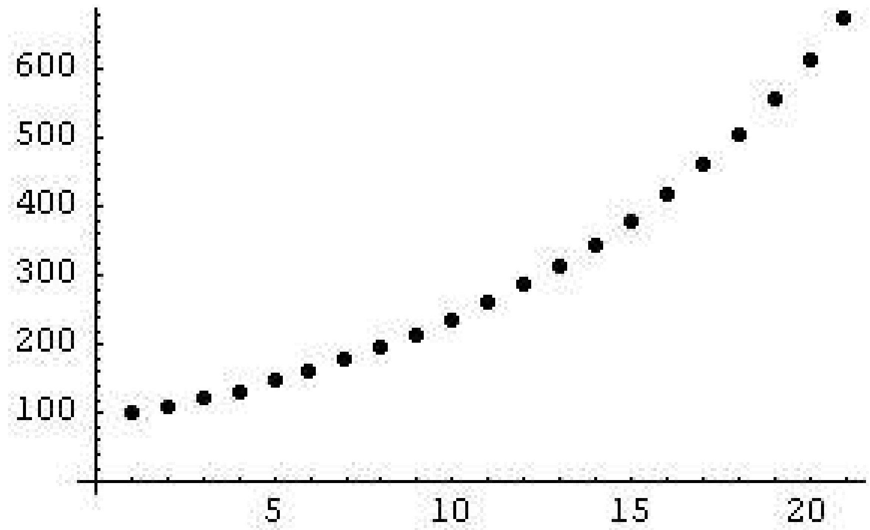
- Rozważmy populację much. Oznaczmy liczbę much w roku *n*-tym przez x_n. Załóżmy, że na każdą muchę w pokoleniu n średnio przypada R much w pokoleniu następnym. Wtedy ewolucja much jest dana przez:

$$x_{n+1} = R\,x_n$$

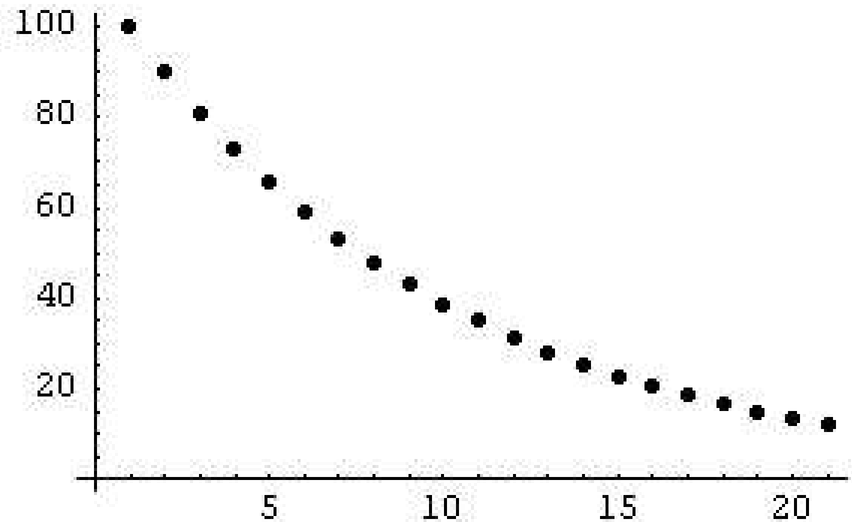
$$x_n = R^n x_0$$

Przykład: funkcja liniowa

- Stały wzrost ($R>1$)



- Stały rozpad ($R<1$)



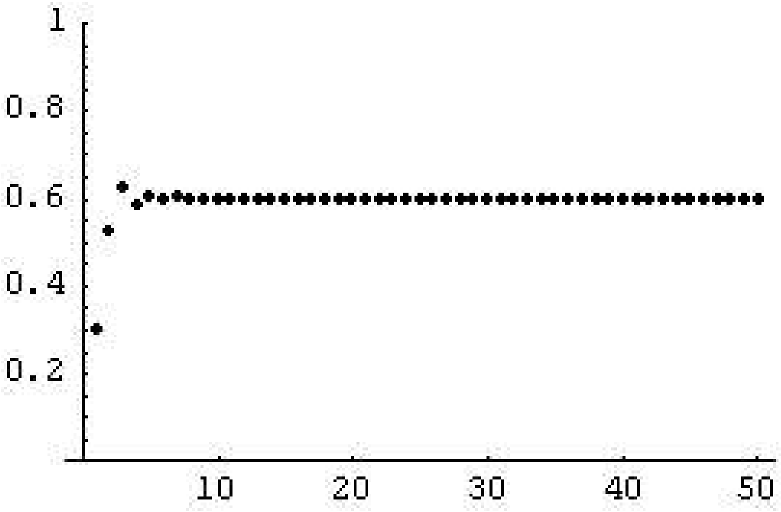
Przykład: funkcja logistyczna

Model liniowy jest zbyt dużym uproszczeniem. Wzrost populacji zwykle ograniczony jest przez czynniki zewnętrzne: drapieżców, ograniczone zasoby, itp. Biorąc pod uwagę skończoną ilość dostępnego pożywienia dostajemy model zwany logistycznym. Jeżeli wzrost R jest pomniejszony o wielkość proporcjonalną do x_n to dostajemy:

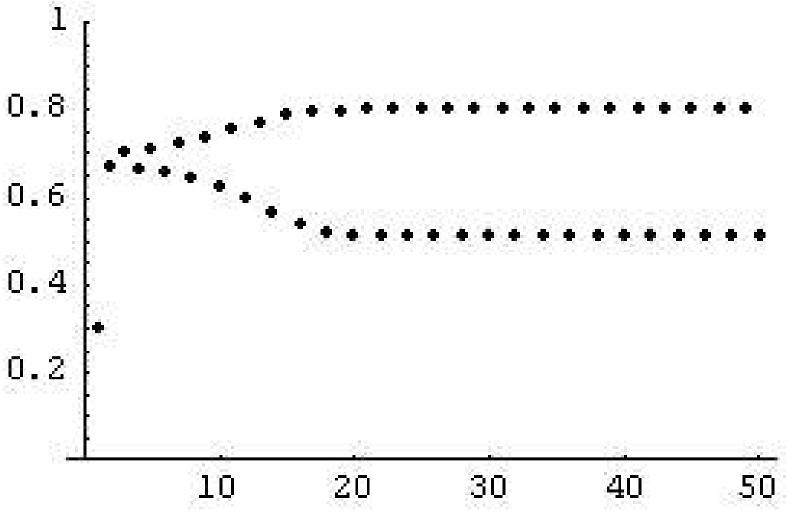
$$x_{n+1} = (R - a\,x_n)\,x_n$$
$$y_{n+1} = r(1 - y_n)\,y_n$$

Szereg czasowy

- W obszarze regularnym (r = 2.5)

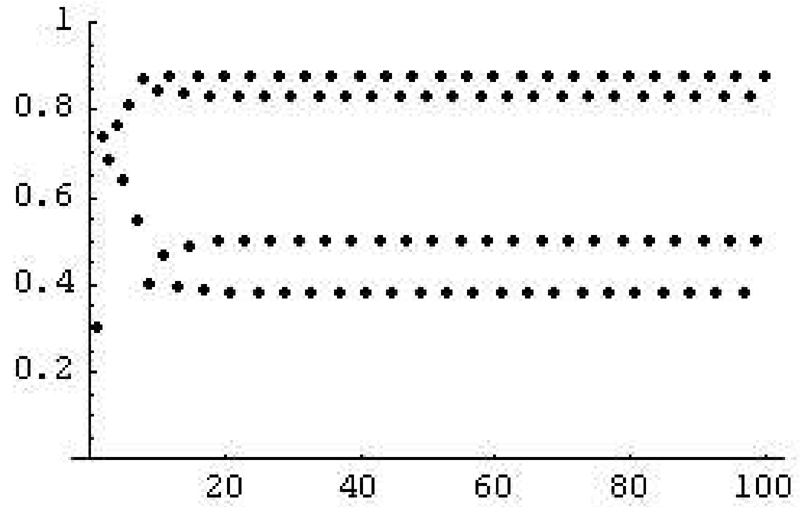


- W obszarze regularnym (r = 3.2)

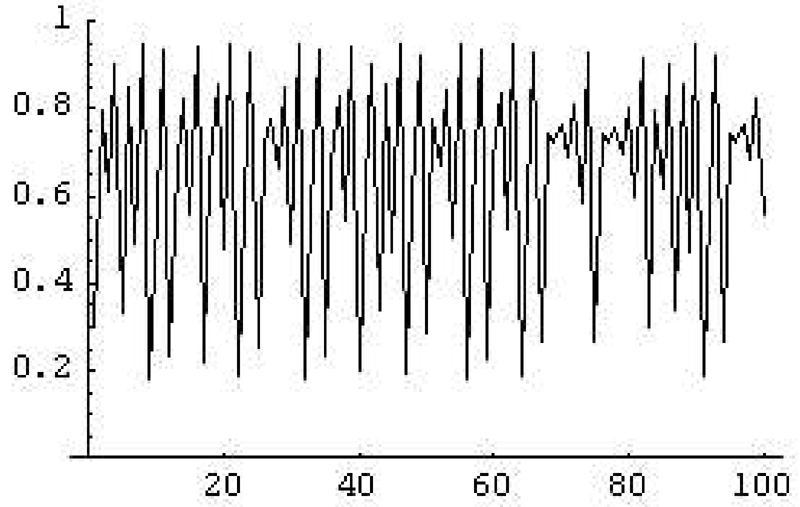


Szereg czasowy

- W obszarze regularnym (r = 3.5)

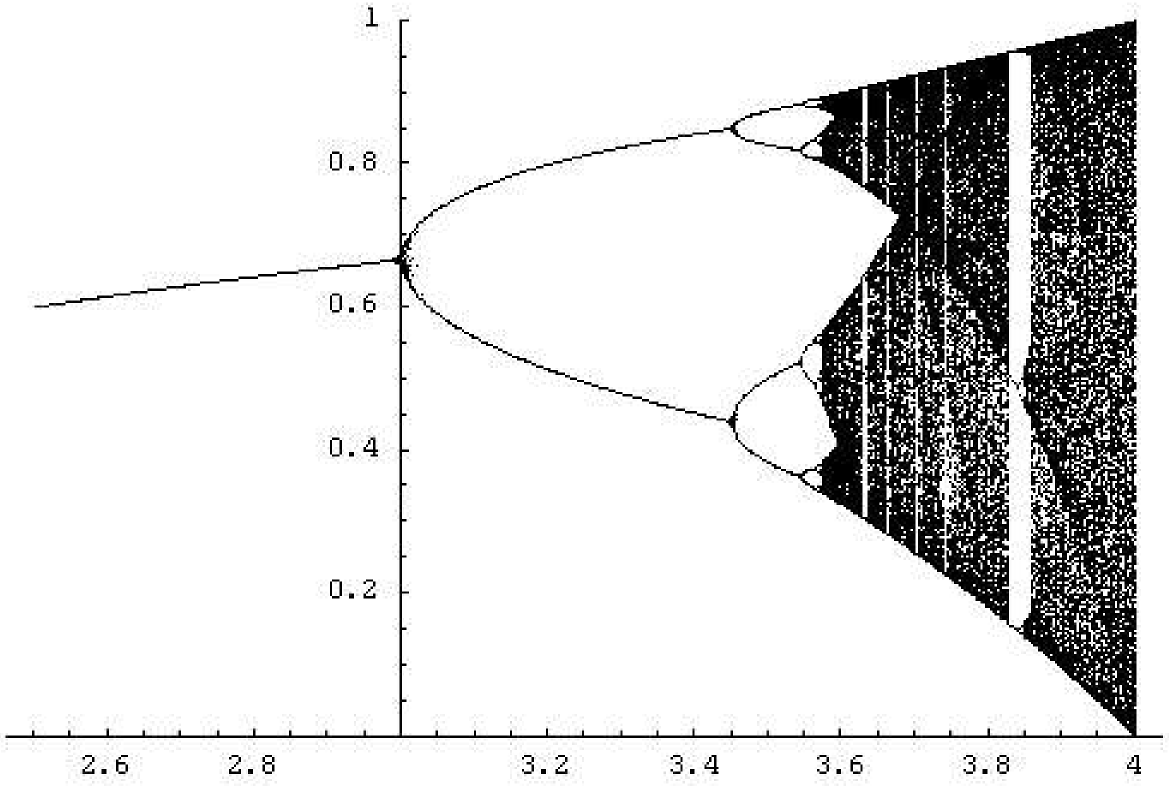


- W obszarze chaotycznym (r = 3.7)



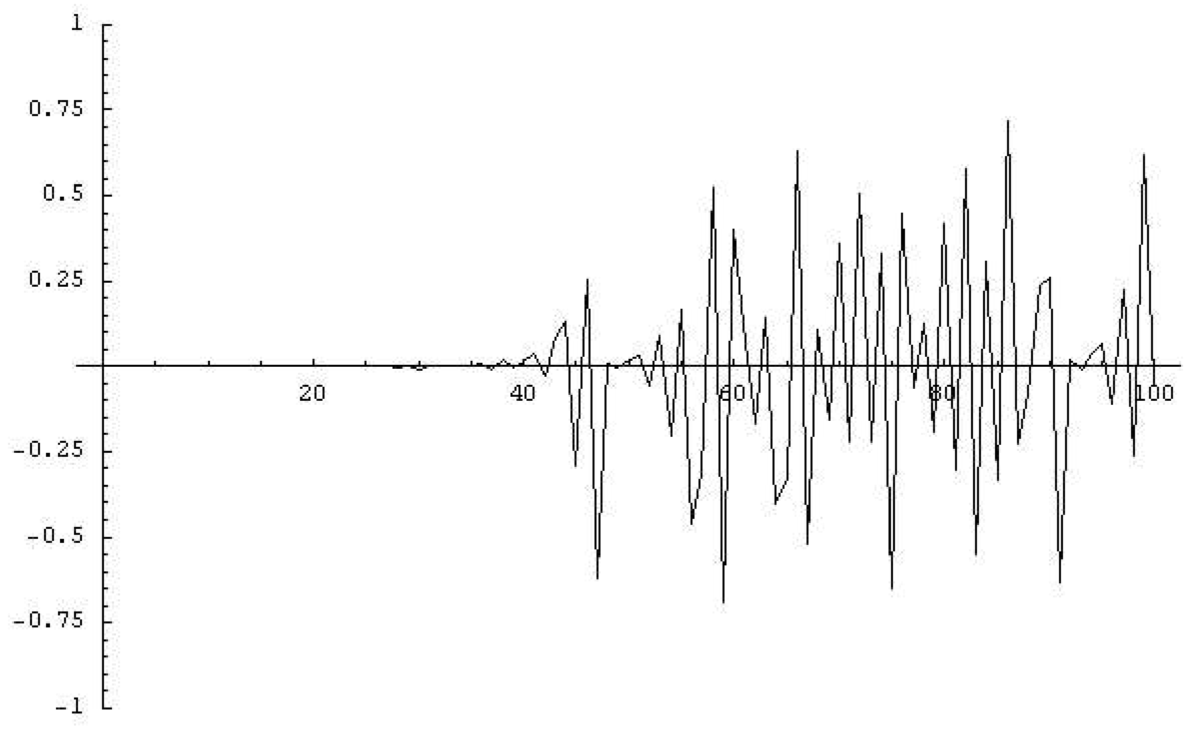
Wykres bifurkacyjny

- Dla mapy logistycznej



Chaos deterministyczny

- Czuła zależność od warunków początkowych: Rysunek pokazuje różnicę między historią dwóch populacji różniących się początkowo o 0.0000001



Iteracje płaszczyzny

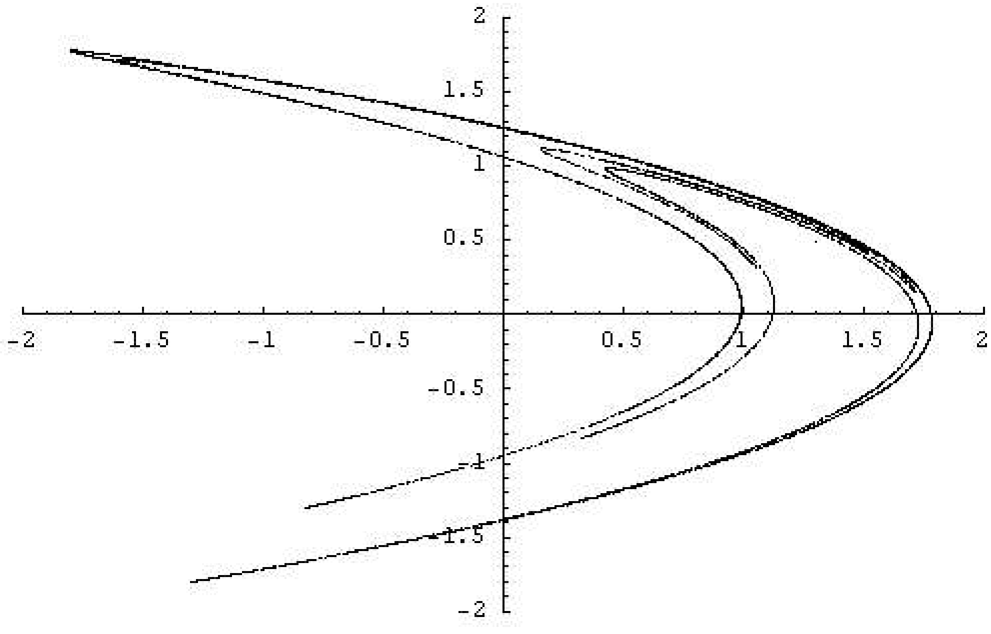
- Przykład dwuwymiarowy: mapa Henona

$$x_{n+1} = A - x_n^2 + B y_n$$

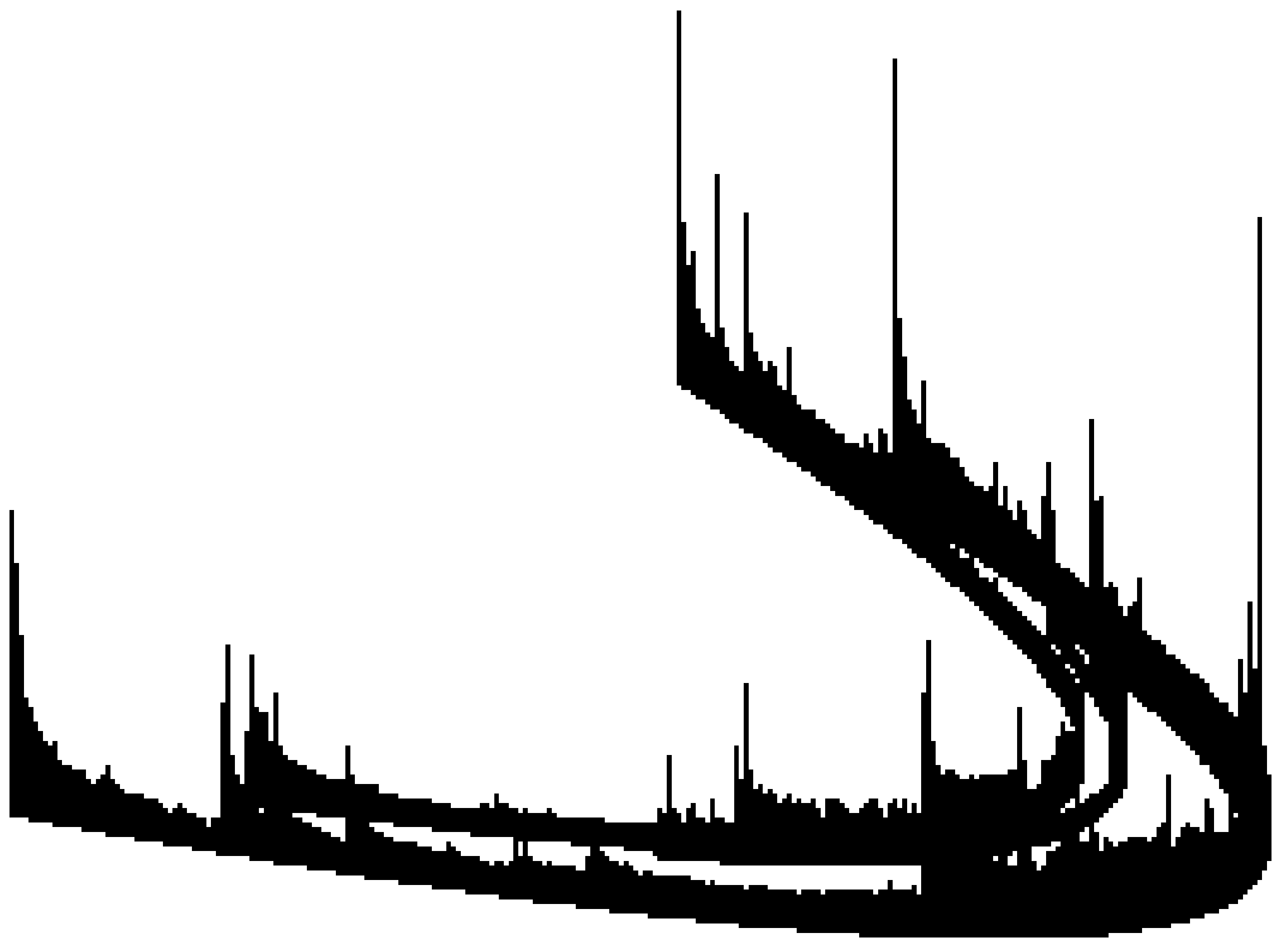
$$y_{n+1} = x_n$$

Dziwny atraktor

Dla pewnych wartości parametrów *A* i *B*, mapa Henona dąży do atraktora, który jest fraktalem. Taki atraktor nazywamy **dziwnym**.



Prawdopodobieństwo odwiedzin obszarów na atraktorze



Typowe atraktory

- Punkty stałe
- Cykle okresowe
- Dziwne atraktory (fraktale)

Układy z ciągłym czasem

- Większość interesujących układów zmienia się w czasie w sposób ciągły. Modelujemy to za pomocą **równań różniczkowych**. Równania te określają szybkość zmian parametrów układu w funkcji tych parametrów. Na przykład szybkość zmian położenia joja jest funkcją jego prędkości, położenia, oraz przyłożonej siły (ruch ręką).
- Aby w układach z ciągłym czasem pojawił się chaos, potrzebne są co najmniej 3 zmienne.

Przykład: równania Lorenza

- Uproszczony model konwekcji w atmosferze:

$$x_{n+1} = x_n + 10(y_n - x_n)\epsilon$$
$$y_{n+1} = y_n + (28\ x_n - y_n - x_n z_n)\epsilon$$
$$z_{n+1} = z_n + \left(-\frac{8}{3} z_n + x_n y_n\right)\epsilon$$

- ε to mała liczba określająca precyzję czasową zmian stanu układu

Samopodobieństwo

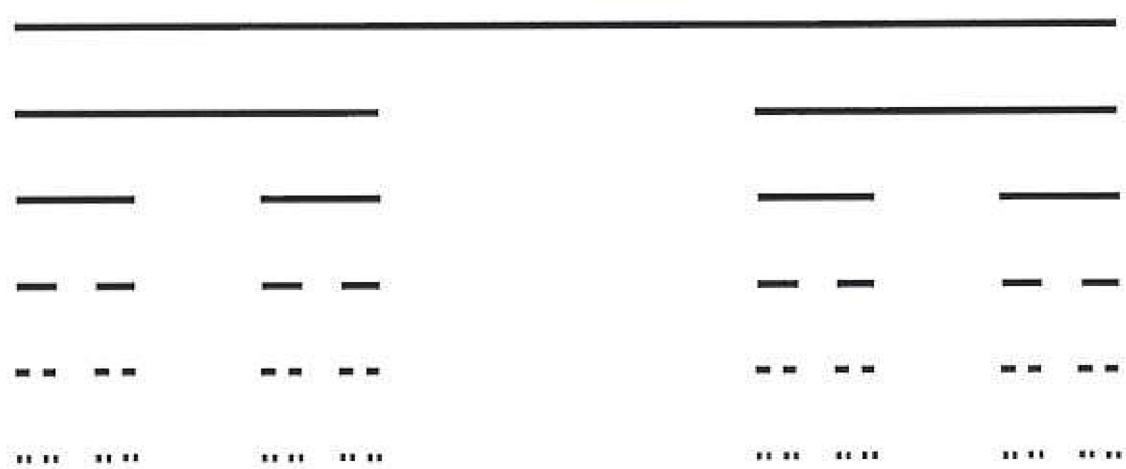
- Figura jest samopodobna, jeżeli można ją podzielić na części podobne do całości
- Przykłady:
  - Trójkąt
  - Kwadrat
  - Odcinek

Fraktale

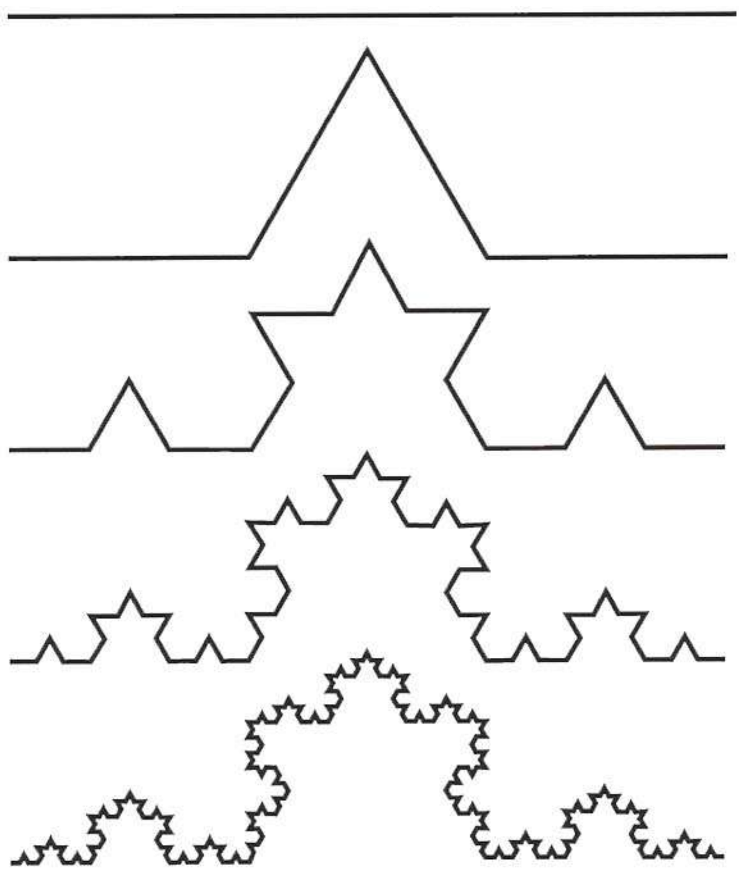
- *Fraktal*: zbiór samopodobny o „niecałkowitym wymiarze”
- Przykłady fraktali to:
  - Zbiór Cantora
  - Krzywa Kocha
  - Trójkąt Sierpińskiego

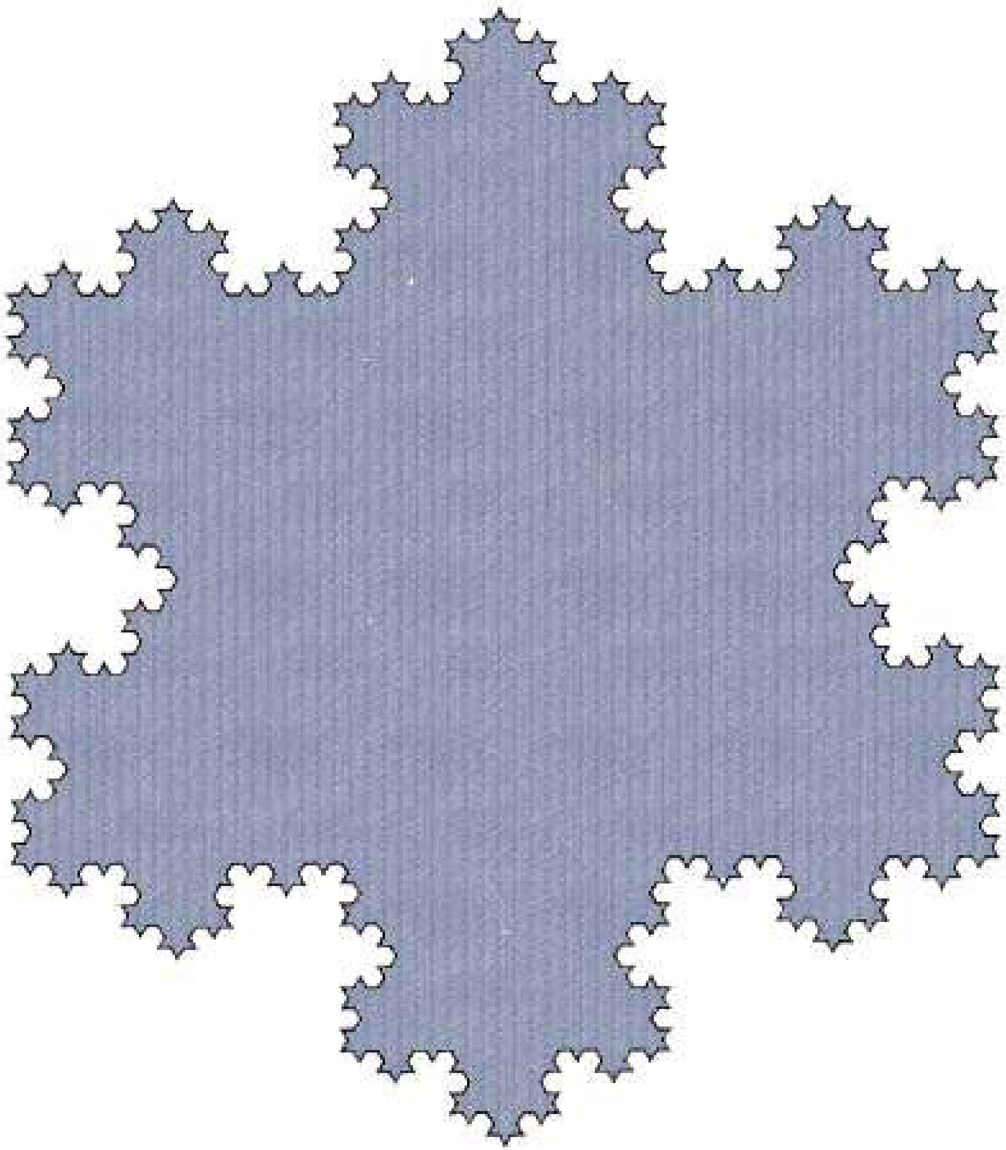
Przykład: zbiór Cantora

- Wycinamy środkową jedną trzecią danego odcinka
- Stosujemy tą procedurę do każdej otrzymanej części
- Po (nieskończenie) wielu powtórzeniach otrzymamy zbiór Cantora



Przykład: krzywa i płatek Kocha

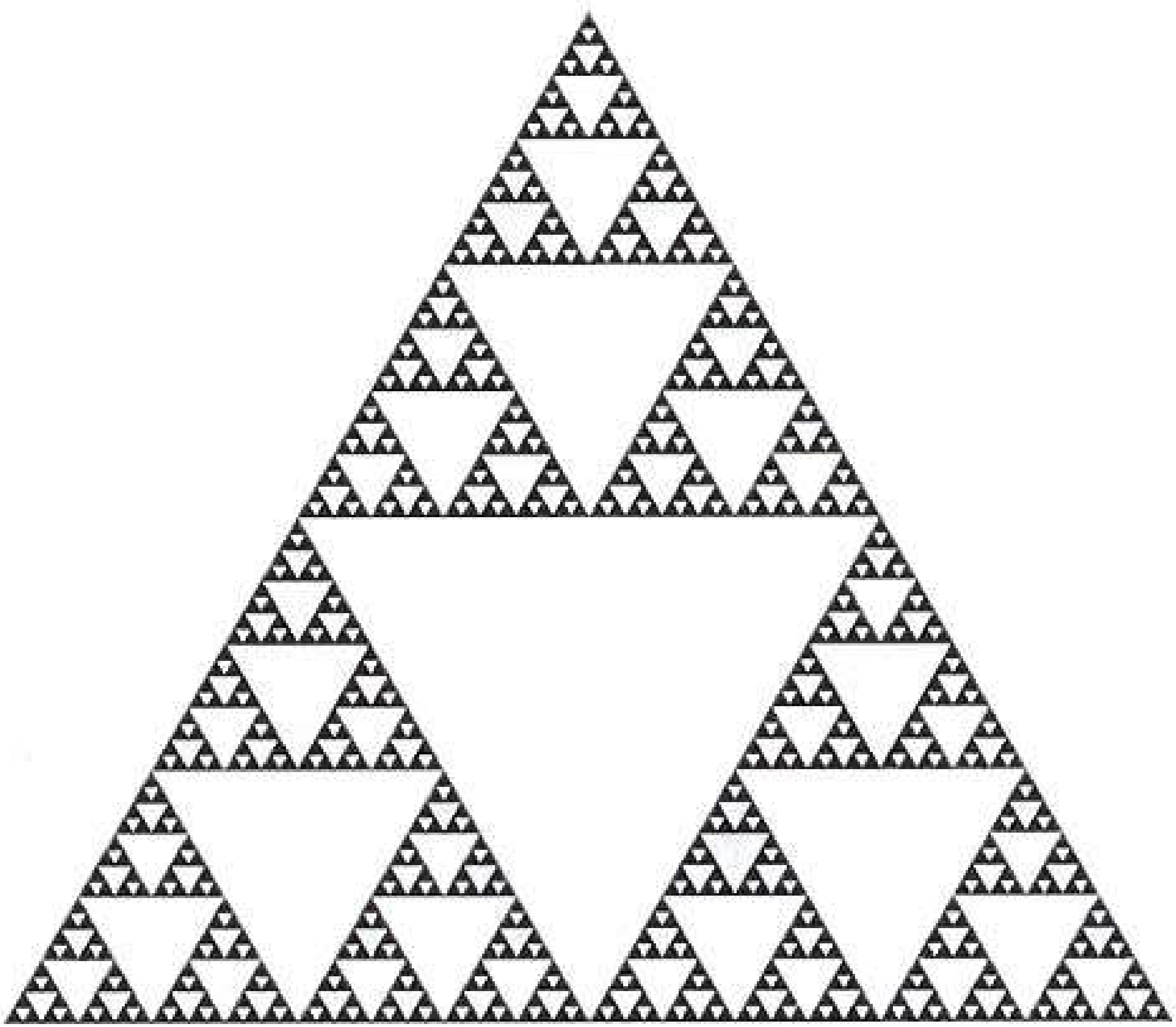




Przykład: trójkąt Sierpińskiego

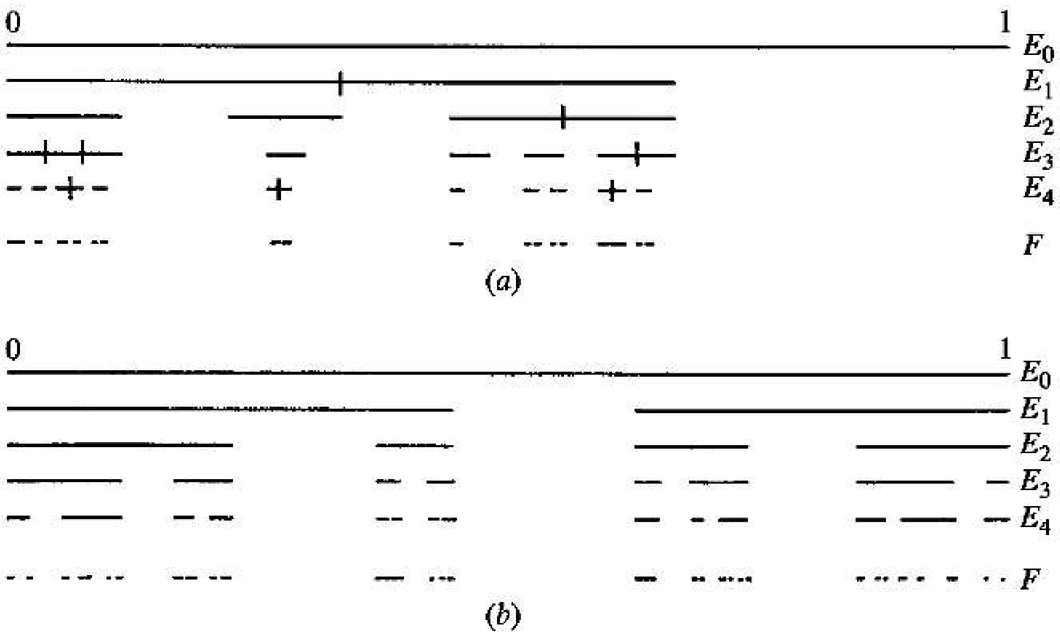
- Metoda 1: wycinamy coraz to mniejsze trójkąty ze zbioru początkowego
- Metoda 2: używamy dostępnej struktury w kroku N do konstrukcji kroku N+1 po czym skalujemy

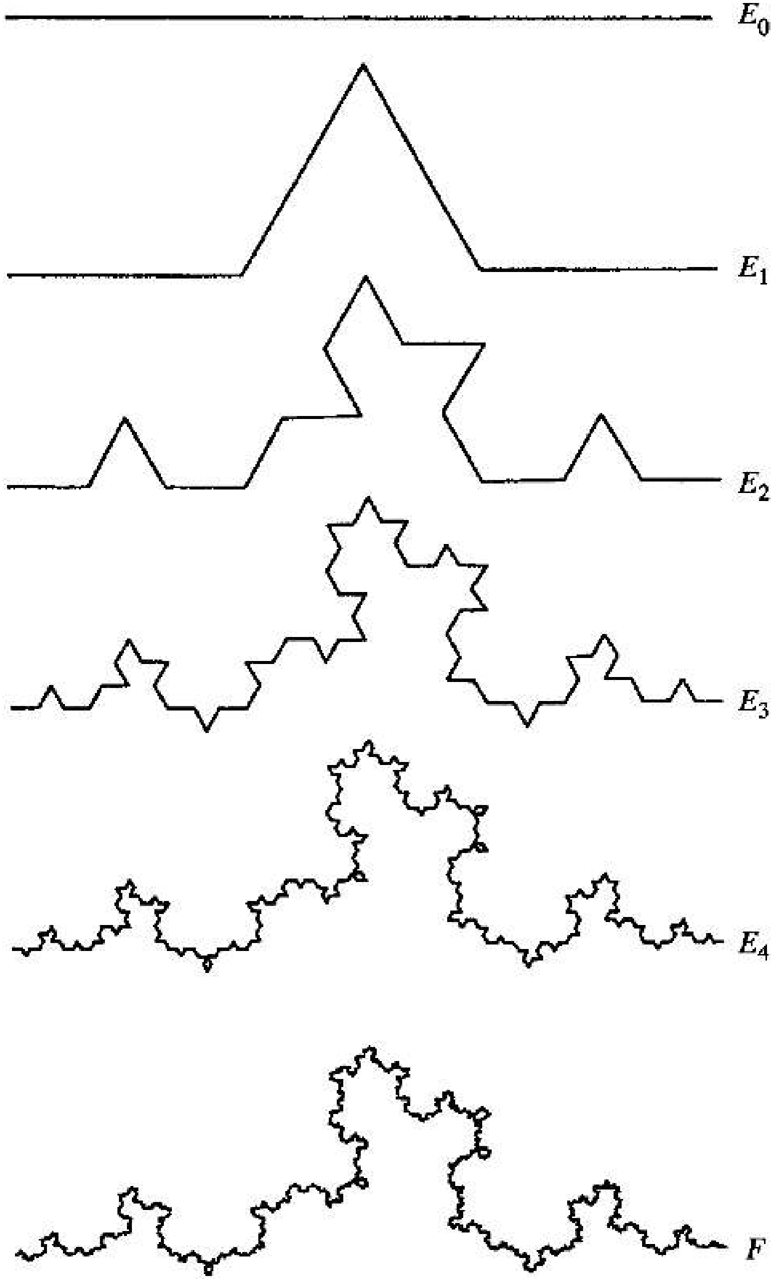
Trójkąt Sierpińskiego



Fraktale losowe

- Losowe zbiory Cantora
- Losowe trójkąty Sierpińskiego
- Większość fraktali spotykanych w przyrodzie





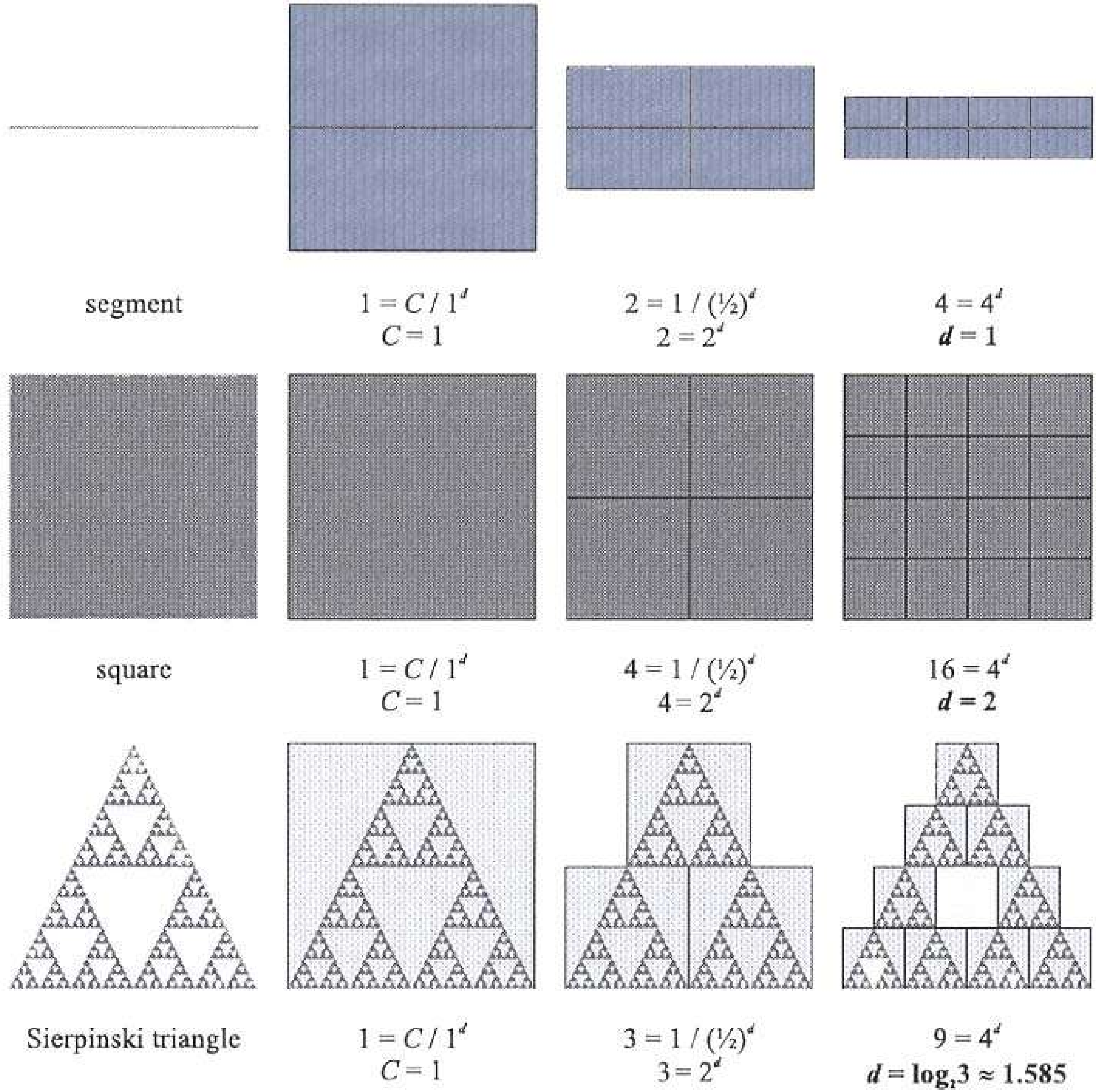
Wymiar fraktalny

- Opisuje skalowanie masy układu przy zmianie skali długości
- Wymiar prostych zbiorów zero-, jedno- i dwuwymiarowych
- Porównanie z fraktalami

$$N(\epsilon) \approx C\,\epsilon^{(-D)}$$

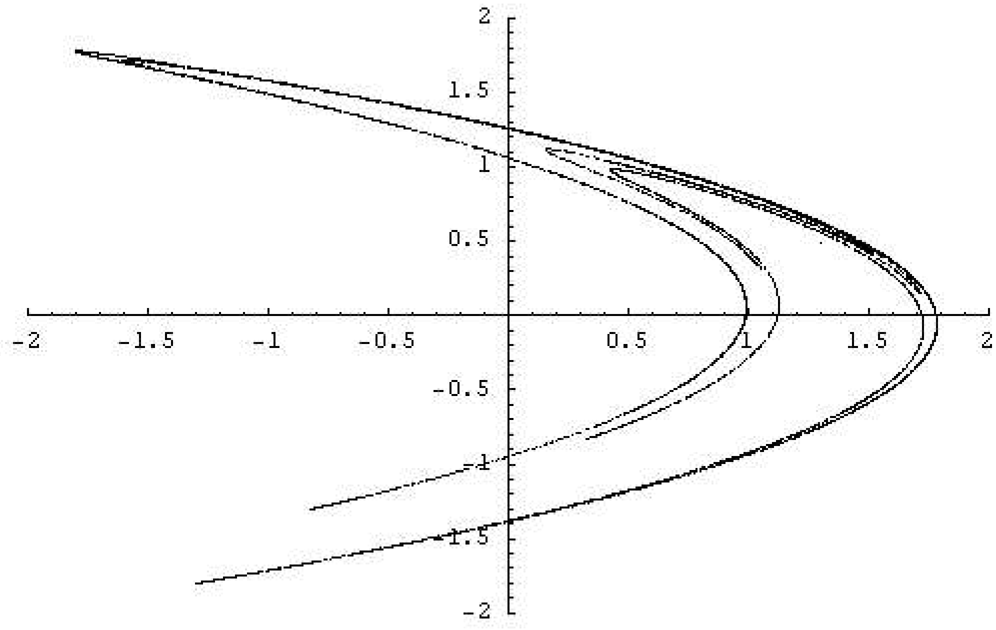
$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$

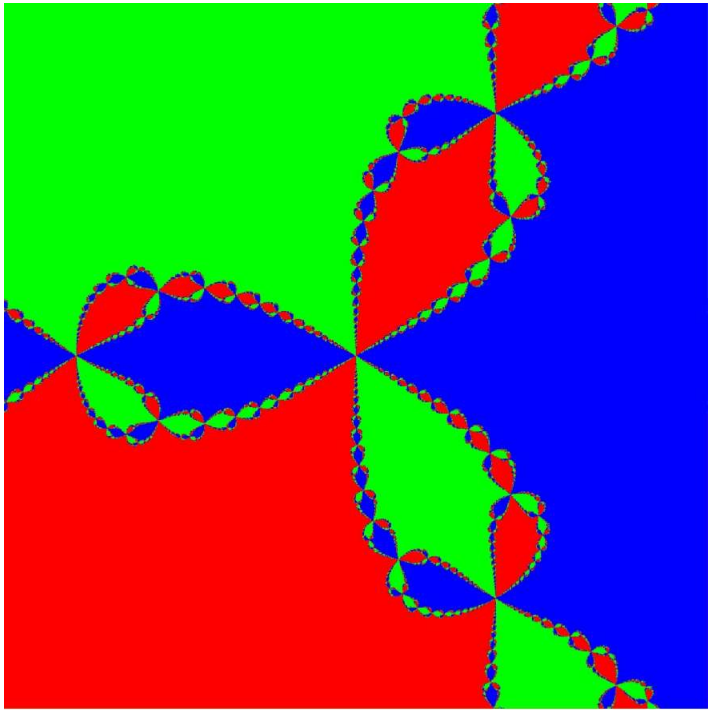
Wymiar fraktalny



Fraktale a układy dynamiczne

- Zbiory niezmiennicze (atraktory, np. atraktor Henona, atraktor Lorenza)
- Granice zbiorów przyciągania (np. brzegi basenów pierwiastków jedynki dla metody Newtona)





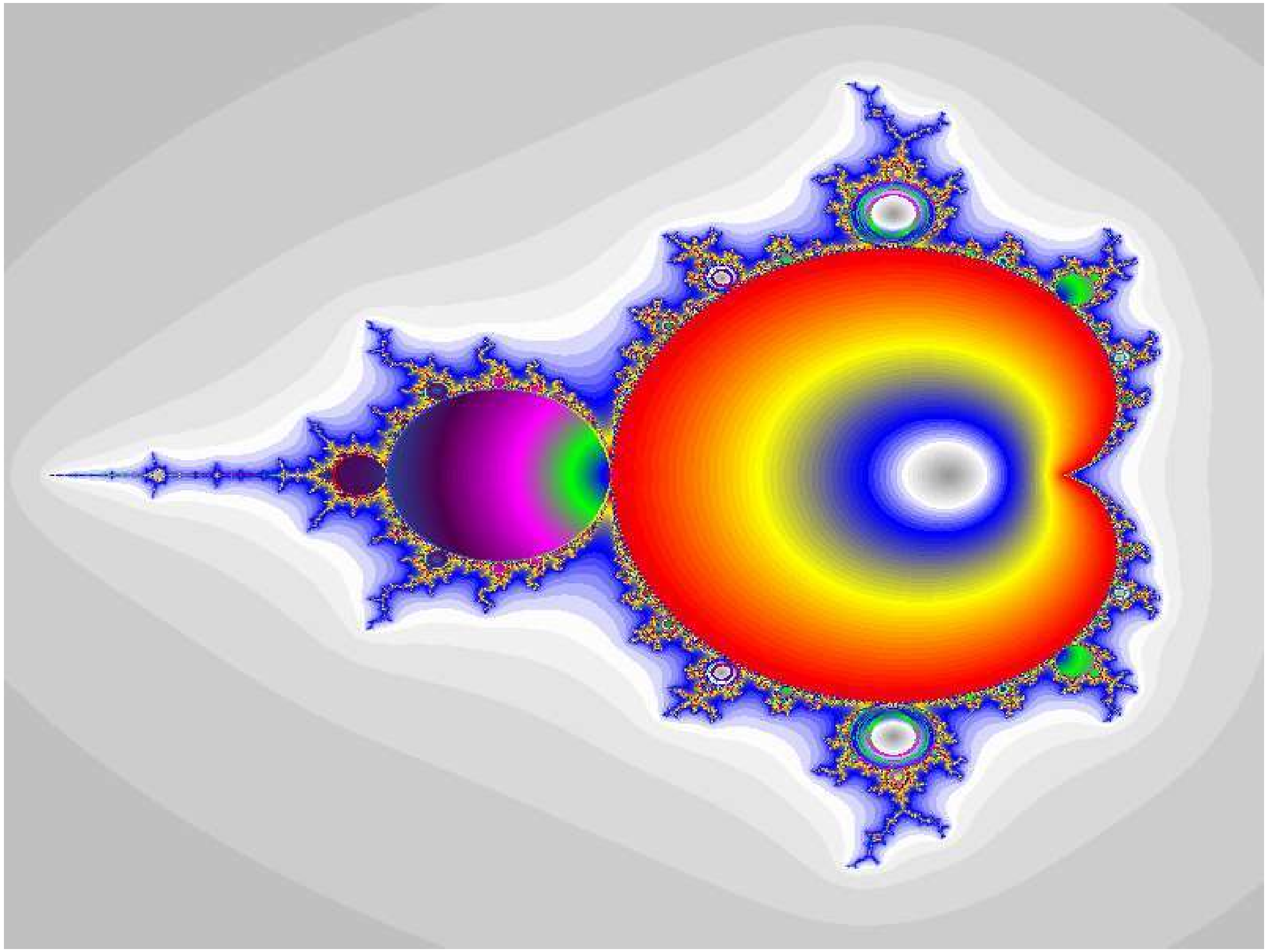
Konstrukcja zbioru Mandelbrota

- Rozważmy odwzorowanie

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + x_0$$
$$y_{n+1} = 2\ x_n y_n + y_0$$

- Kolejne iteracje (punkty)
  - Albo rosną nieograniczenie („uciekają do nieskończoności”),
  - Albo nie wychodzą poza koło o środku w (0,0) i promieniu 2.
- Zbiór punktów drugiego typu to **żuk Mandelbrota**

Żuk Mandelbrota



Literatura

- *„Czy Bóg gra w kości”* Ian Stewart
- *„Chaos"* James Gleick
- *„Granice chaosu. Fraktale”*
  Peitgen, Jürgens, Saupe
- *„Fraktale”* Piotr Pierański
- *„Wstęp do dynamiki układów chaotycznych”*
  Baker, Gollub
- *„Chaos w układach dynamicznych”* Ed Ott
- *„Understanding nonlinear dynamics”*
  Kaplan, Glass

Użyte programy

- Feigenbaum
- Lorenz
- Sierpinski
- Mandelbrot

Źródła

- http://www.wiw.pl/modelowanie/